Carpeta de Matemática 1
Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 4

Nueva carpeta de Matemática IV

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa
Nora Legorburu - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

6. Trigonometría 3
Revisión inicial 4
Ángulos orientados en el sistema cartesiano 5
Sistema circular de medición de ángulos 6
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo 7
Resolución de triángulos rectángulos 8
Razones trigonométricas para cualquier ángulo 10
La circunferencia trigonométrica 11
Resolución de triángulos cualesquiera 12
En el mundo real 15
La trigonometría y la imagen satelital 15
Las razones trigonométricas en la historia 16
Más actividades 17
Autoevaluación 20

7. Estadística 21
Revisión inicial 22
Introducción 23
El símbolo Σ 24
Tablas de frecuencias 25
Gráficos estadísticos 27
Medidas de tendencia central 30
Medidas de posición 32
Gráfico de caja 33
Medidas de dispersión 34
Estadística bidimensional 37
Correlación 38
Recta de regresión 40
En el mundo real 43
La estadística en los medios 43
La planilla de cálculo y la recta de regresión 44
Más actividades 45
Autoevaluación 46
Actividades integradoras 47

AIQUE

Este CUADERNILLO 4 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática IV.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

COPIEDICIÓN
Maricel Besse

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
María Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Estudio DOBLEVUELO

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Ivana Dodero en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0076-3
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

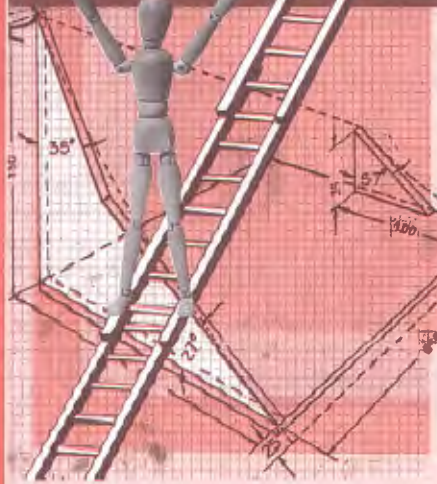
Nueva carpeta de matemática IV / Carlos Abdala...[et.al.]. ; adaptado por Ruth Schaposchnik. - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
192 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0076-3

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, adapt.
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en marzo de 2008 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

6 TRIGONOMETRÍA



Muchos de los problemas concretos que tuvo que resolver la humanidad involucraron la proporcionalidad geométrica. Por ejemplo, las relaciones entre las medidas de los lados y de los ángulos de un triángulo, conocidas como *razones trigonométricas*. En la Antigüedad, esas relaciones ya eran conocidas: los egipcios las utilizaron y, más tarde, los griegos las describieron.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Completen las siguientes oraciones (redondeen a los centésimos cuando sea necesario).

La aguja de un cronómetro mide 2 cm. En 60 segundos, el extremo de la aguja recorre ..... cm; en 30 segundos, ... cm, y en 2 minutos y medio, ... cm.

El extremo de la aguja recorre aproximadamente 9,42 cm en un lapso de ..... segundos.

2 Completen la tabla.

$\hat{\alpha}$	Complemento de $\hat{\alpha}$	Suplemento de $\hat{\alpha}$
20°		
	65°	
		96° 20′
	90°	
x		

3 En cada uno de los siguientes casos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los ángulos interiores del triángulo ABC. Averigüen si cada triángulo es rectángulo.

a) $\begin{cases} \hat{A} = 2\hat{x} \\ \hat{B} = \hat{x} \\ \hat{C} = 3\hat{x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \hat{A} = \hat{x} + 1° \\ \hat{B} = 2\hat{x} + 4° \\ \hat{C} = 55° \end{cases}$

c) $\begin{cases} \hat{A} = \frac{\hat{x}}{2} \\ \hat{B} = \frac{\hat{x}}{2} \\ \hat{C} = \hat{x} - 4° \end{cases}$

4 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y justifiquen la respuesta.

a) El teorema de Pitágoras es válido para cualquier triángulo.

b) Los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida.

c) Los ángulos alternos internos entre paralelas son suplementarios.

d) En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm, la hipotenusa mide 14 cm.

e) En un triángulo rectángulo, si un cateto mide 7 cm y la hipotenusa, 9 cm, el otro cateto mide $4\sqrt{2}$ cm.

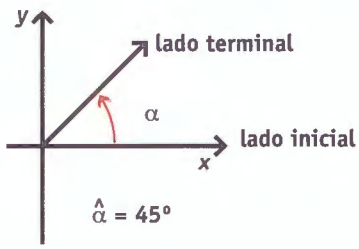
f) El ángulo central de una circunferencia mide 360° y es equivalente a un giro.

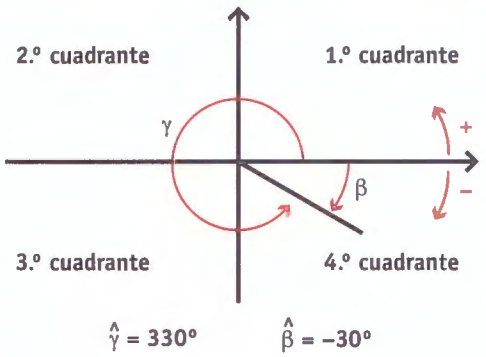
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ángulos orientados en el sistema cartesiano

Para observar

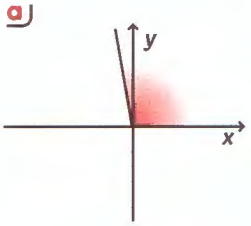
Así representamos ángulos en el sistema cartesiano.



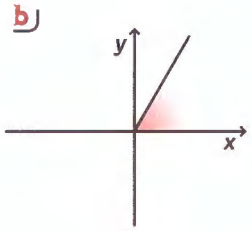


5 Los ángulos dibujados miden 60°, 100°, 200° y 300° (no necesariamente en este orden). Indiquen cuál es cada uno de ellos. Señalen en cada uno el lado inicial y el lado terminal.

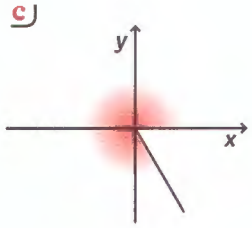
a)



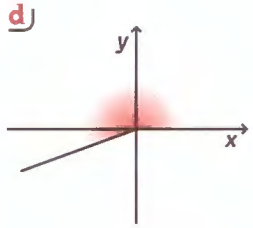
b)



c)

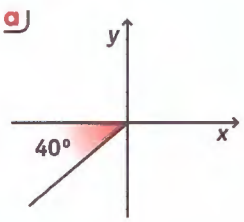


d)

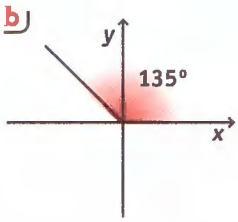


6 Completen los siguientes esquemas con arcos que abarquen ángulos de 1125°, 580°, 495° y −380° (no necesariamente en este orden), utilizando los indicados.

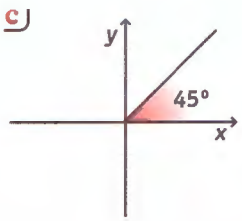
a)



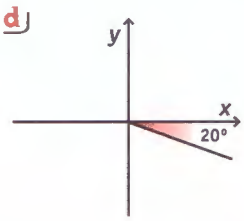
b)



c)



d)



7 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones referidas a ángulos representados en un sistema cartesiano son falsas y justifiquen sus respuestas.

a) Los ángulos de 28°, 388° y 1108° tienen el mismo lado terminal.

b) $\hat{\alpha} = -100°$ está en el cuarto cuadrante.

c) Los lados terminales de $\hat{\alpha} = 180°$ y $\hat{\beta} = 270°$ son semirrectas opuestas.

d) Existen sólo tres ángulos positivos cuya medida es menor que 1100° y tienen el mismo lado terminal que $\hat{\gamma} = -25°$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

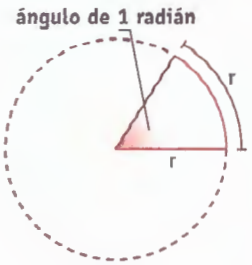
Sistema circular de medición de ángulos

Para leer y recordar

- En el *sistema circular*, los ángulos se miden en *radianes*.
- Un *radián* es la medida del ángulo central que en una circunferencia determina un arco de la misma medida que el radio.

Como el radio está comprendido 2π veces en la longitud de la circunferencia, un ángulo de un giro corresponde a 2π radianes.

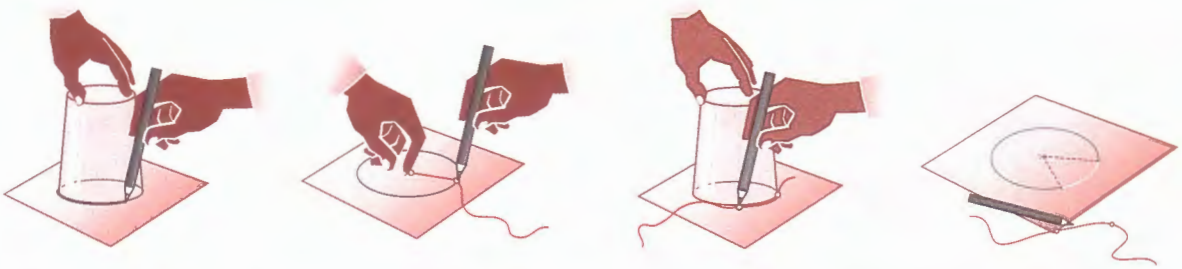
Si conocemos la medida de un ángulo en grados, y queremos calcular su medida en radianes, o viceversa, debemos tener en cuenta que 180° equivalen a π radianes, es decir:



$$\frac{\hat{\alpha}\,(°)}{180°} = \frac{\hat{\alpha}\,(\text{rad})}{\pi}$$

Para indicar que la medida de $\hat{\alpha}$ es 2 radianes, ponemos $\hat{\alpha} = 2$ *rad* o, directamente, $\hat{\alpha} = 2$.

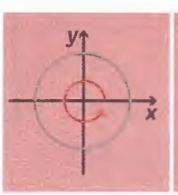
8 Utilicen un objeto de base circular y un hilo para construir un ángulo de un radián.



a) Realicen las mediciones necesarias para averiguar aproximadamente a cuántos grados sexagesimales equivale 1 radián.

b) Redondeen los segundos al entero y calculen la medida en grados de un ángulo de 1 radián.

9 Completen la tabla.

						
$\hat{\alpha}$ (°)		−360				
$\hat{\alpha}$ (rad)				$\frac{3\pi}{2}$		

10 Una ruleta con números ordenados del 1 al 36 tiene una traba fija que la detuvo en el 1. Silvina la hizo girar y, luego de que dio exactamente seis vueltas y cuarto en sentido contrario a las agujas del reloj, aseguró que había salido un número impar.

a) Analicen si es verdad.

b) Hallen en radianes el ángulo "recorrido" por el número 1.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

11 Fede y Pablo suelen jugar carreras con sus autitos en una escalera de su casa que tiene 6 escalones iguales y alcanza una altura de 1,08 m. Cuando se aburren, deciden aumentar el desafío y realizar las carreras en otra escalera más alta, que tiene doce escalones y alcanza una altura de 2,16 m. Al pasar Leila, la hermana mayor, escucha que ellos dicen que estas carreras no son tan difíciles porque, aunque la escalera es más alta, la inclinación es la misma que en la otra escalera.
Leila les dice que no es cierto, porque los escalones de la escalera más baja tienen 15 cm de profundidad, y los de la más alta, 20 cm.

¿Tiene razón Leila? ¿Por qué?

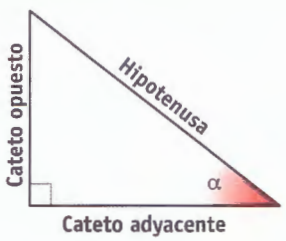
.....

Para observar

seno del ángulo α: $sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

coseno del ángulo α: $cos\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

tangente del ángulo α: $tg\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}}$



- **Como las razones trigonométricas de muchos ángulos tienen infinitas cifras decimales, en lo sucesivo, para los casos en los que resulte necesario hacer aproximaciones, adoptaremos los siguientes criterios:**
  - **las razones trigonométricas las redondearemos a los milésimos;**
  - **en las medidas angulares, los segundos los redondearemos a las unidades;**
  - **en el resto de las medidas, redondearemos los resultados a los centésimos.**

12 Resuelvan las siguientes consignas.

a) Dibujen dos triángulos rectángulos: uno que tenga un ángulo de 30° y otro que tenga un ángulo de 45°.

b) Midan los lados en milímetros y calculen *sen* 30°, *cos* 30°, *tg* 30°, *sen* 45°, *cos* 45° y *tg* 45°. (Redondeen a los milésimos cuando sea necesario).

c) Obtengan los valores con una calculadora científica y compárenlos con los anteriores.

d) Si encuentran diferencias, expliquen los motivos que pudieron haberlas provocado.

13 Hallen una medida de $\hat{\alpha}$ en grados que verifique cada igualdad. Utilicen la función inversa de la calculadora.

a) $sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos\ \hat{\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $tg\ \hat{\alpha} = 3{,}732$

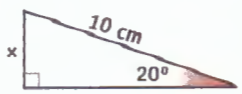
14 Expliquen por qué el seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre números menores que 1.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

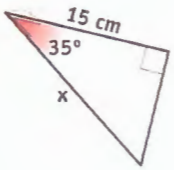
Resolución de triángulos rectángulos

15 Hallen la medida de x en cada figura.

a)

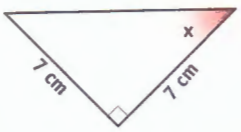


c)



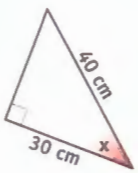
e)

b)



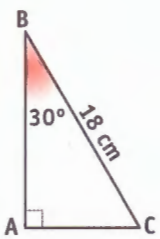
d)

f)

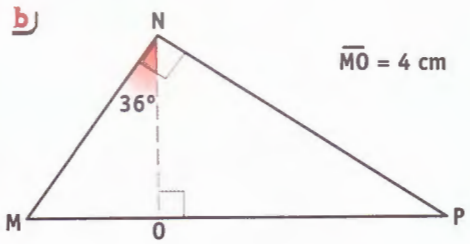


16 Hallen el perímetro y el área de los triángulos ABC y MNP.

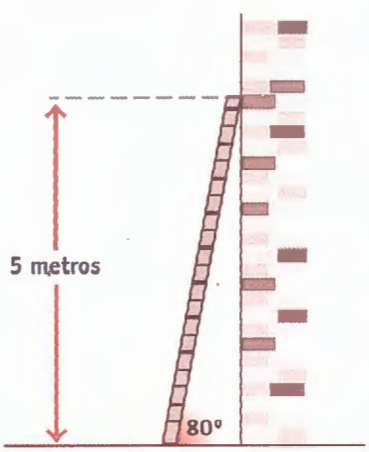
a)



b)

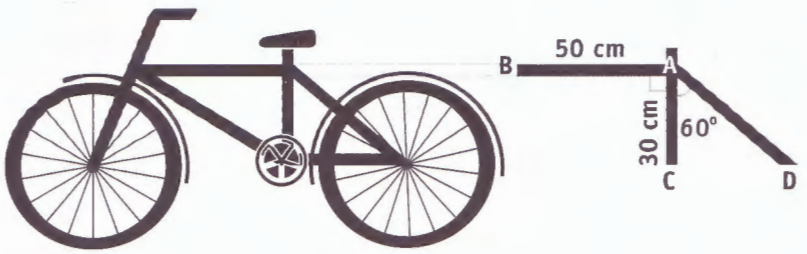


17 Una escalera está apoyada en una pared vertical a una altura de 5 metros del suelo.
El ángulo que forma con el suelo es de 80°.
¿Cuánto mide la escalera?



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

18 Observen atentamente la figura de la bicicleta y encuentren las medidas pedidas.



a) La distancia del manubrio (B) al eje de la corona (C).

b) El ángulo central que forman dos rayos consecutivos de las ruedas, en grados y en radianes, si cada rueda tiene 18 rayos.

c) El ángulo determinado por el caño vertical que sostiene al asiento (AC) y el caño oblicuo que contiene a la corona (CB).

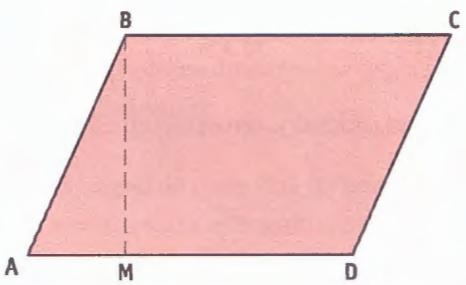
d) El ángulo determinado por el caño horizontal que contiene al manubrio (BA) y el caño oblicuo que contiene a la corona (CB).

e) La distancia del eje de la corona al centro de la rueda trasera (CD).

f) Cada uno de los cinco ángulos centrales de la corona, en grados y en radianes.

g) El ángulo central que abarca cada uno de los guardabarros, en grados y en radianes.

19 Calculen el perímetro y el área del paralelogramo.



$\hat{ADC} = 120°$ .....

$\overline{AB} = 10$ cm .....

$\overline{MD} = x$ cm .....

$\overline{BD} = (x + 1)$ cm .....

$\overline{BM} \perp \overline{AD}$ .....

20 Calculen la altura de una antena utilizada en un sistema de comunicación, sabiendo que su sombra mide 238 metros cuando los rayos del sol forman un ángulo de 40° con el suelo.

.....

.....

.....

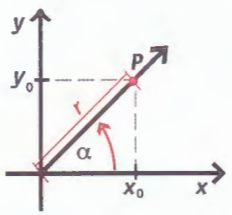
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Razones trigonométricas para cualquier ángulo

Para leer y recordar

Así definimos las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera, en función de las coordenadas de un punto que se encuentre en su lado terminal.

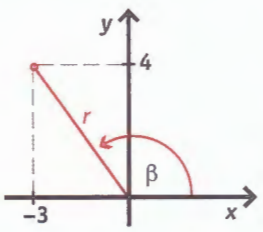


$P = (x_0; y_0)$

$sen\,\hat{\alpha} = \frac{y_0}{r}$

$cos\,\hat{\alpha} = \frac{x_0}{r}$

$tg\,\hat{\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$



$P = (-3; 4) \quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

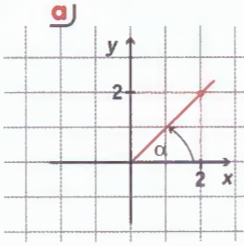
$sen\,\hat{\beta} = \frac{4}{5}$

$cos\,\hat{\beta} = \frac{(-3)}{5} = -\frac{3}{5}$

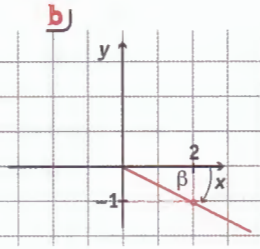
$tg\,\hat{\beta} = \frac{4}{(-3)} = -\frac{4}{3}$

21 Observen los datos en cada figura, y escriban las razones trigonométricas.

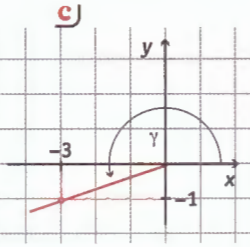
a)



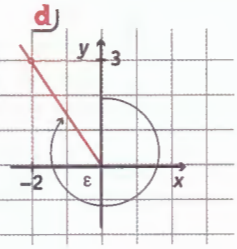
b)



c)



d)



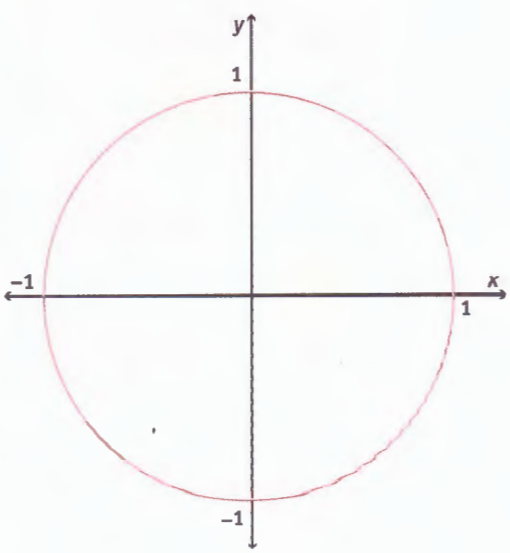
$sen\,\hat{\alpha} =$ ..... $sen\,\hat{\beta} =$ ..... $sen\,\hat{\gamma} =$ ..... $sen\,\hat{\varepsilon} =$ .....

$cos\,\hat{\alpha} =$ ..... $cos\,\hat{\beta} =$ ..... $cos\,\hat{\gamma} =$ ..... $cos\,\hat{\varepsilon} =$ .....

$tg\,\hat{\alpha} =$ ..... $tg\,\hat{\beta} =$ ..... $tg\,\hat{\gamma} =$ ..... $tg\,\hat{\varepsilon} =$ .....

22 Marquen los siguientes ángulos en la circunferencia de radio unidad y, teniendo en cuenta las definiciones, completen el cuadro.

$\hat{\alpha}$	(x; y)	$sen\,\hat{\alpha}$	$cos\,\hat{\alpha}$	$tg\,\hat{\alpha}$
0°				
90°				
180°				
270°	(0; −1)	−1	0	No existe
360°				
810°				
−90°				

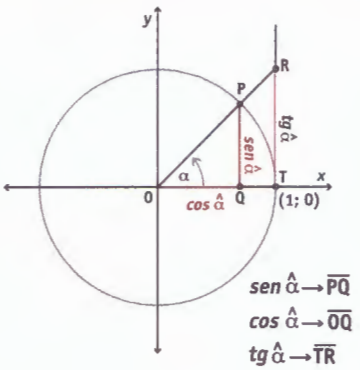


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La circunferencia trigonométrica

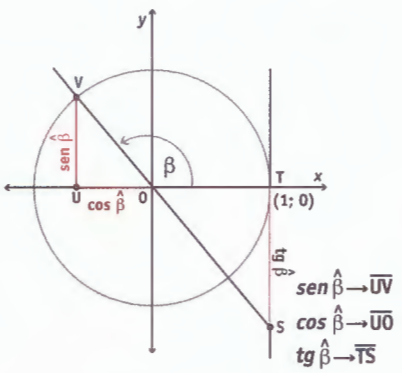
Para observar

- Llamamos *circunferencia trigonométrica* o *circunferencia unidad* a aquella cuyo radio es 1 y su centro es el origen de coordenadas.
Al considerar el radio de 1 unidad, las expresiones en las que aparece este se simplifican.
- La circunferencia trigonométrica nos permite ver una "representación geométrica" del seno, el coseno y la tangente de un ángulo, mediante "segmentos asociados".



$sen\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{PQ}$
$cos\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{0Q}$
$tg\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{TR}$

- Si $\hat{\alpha}$ pertenece al segundo o al tercer cuadrante, encontramos el segmento asociado a la tangente si trazamos la semirrecta opuesta al lado terminal del ángulo hasta su intersección con la recta x = 1.



$sen\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{UV}$
$cos\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{U0}$
$tg\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{TS}$

23 Dibujen una circunferencia trigonométrica y marquen un ángulo en cada cuadrante. Luego señalen con colores distintos los segmentos asociados, respectivamente, al seno, el coseno y la tangente de cada ángulo.

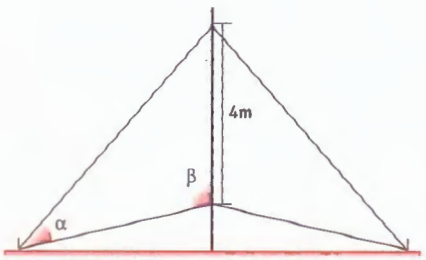
24 El *signo* de cada una de las razones trigonométricas de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentra el ángulo, ya que este determinará el signo de las coordenadas de cualquier punto de su lado terminal. Completen el cuadro.

	Signo del seno (+ | + / − | −)	Signo del coseno	Signo de la tangente
1.° cuadrante	+		
2.° cuadrante	+		
3.° cuadrante	−		
4.° cuadrante	−		

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Resolución de triángulos cualesquiera

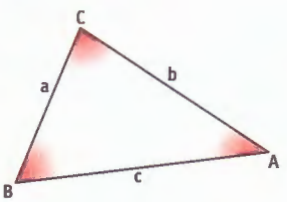
25 Para sostener un poste, se necesitan 4 tensores de acero, como se muestra en la figura.
La indicación de los ingenieros es que los ángulos α y β deben medir 30° y 110°, respectivamente. El contratista encargado de efectuar el trabajo asegura que, sin considerar ataduras y el desperdicio, hay que disponer de 25 m de hilo de acero. ¿Es cierto lo que dice el contratista? ¿Por qué?



Para leer y recordar

Teorema del seno

En todo triángulo, se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos respectivamente opuestos. Esta propiedad se conoce como *teorema del seno*.

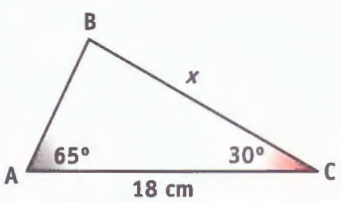


$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

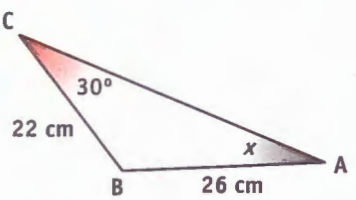
26 Demuestren el teorema del seno. (Sugerencia: elijan un lado como base del triángulo y tracen la altura correspondiente).

27 Utilicen el teorema del seno para calcular x.

a)

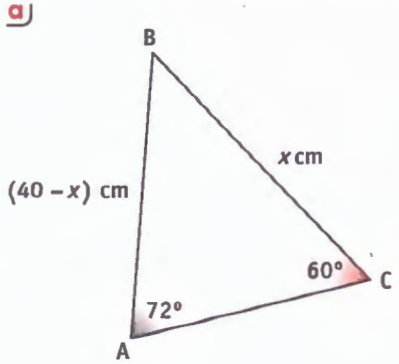


b)

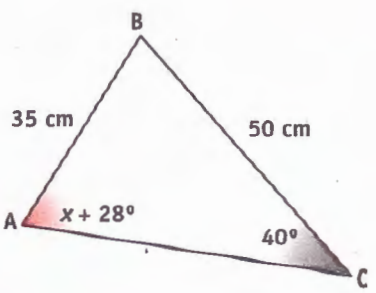


28 Hallen el perímetro de los triángulos.

a)



b)



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

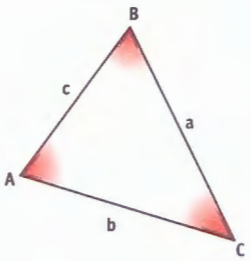
29 Dos pájaros, que están sobre dos ramas de un árbol, divisan un fruto en el suelo. Al mismo tiempo, se lanzan sobre él en línea recta, pero con distintas velocidades, y llegan los dos juntos.
El de la rama más alta estaba a 6 m del fruto; y el otro, a 4 m. Si el ángulo que forman las trayectorias de cada uno es de 60°, ¿se puede averiguar qué distancia separaba a los pájaros en las ramas, con estos datos? ¿Cómo?

Para leer y recordar

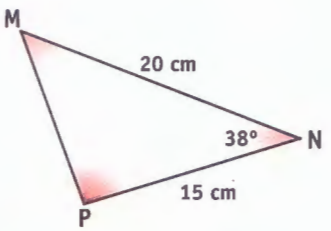
Teorema del coseno

En todo triángulo, se cumple que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo comprendido. Esta propiedad se conoce como *teorema del coseno*.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



30 Hallen el perímetro del triángulo MNP.



.....

.....

31 Calculen los ángulos interiores de un triángulo cuyos lados miden 24 cm, 35 cm y 30 cm.

.....

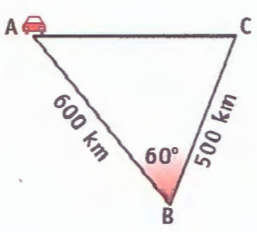
.....

32 ¿Qué se obtiene si se aplica el teorema del coseno a un triángulo rectángulo? Justifiquen la respuesta.

.....

.....

33 Las ciudades A, B y C están ubicadas como se muestra en el esquema.
¿Cuántos kilómetros recorre un automóvil que sale de A, se dirige a B y a C y vuelve al punto de partida sin ir dos veces por la misma ruta?



.....

.....

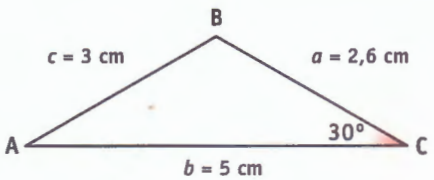
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

34 Expresen, en los sistemas sexagesimal y circular, la medida del ángulo convexo que forman las agujas de un reloj en cada uno de los siguientes horarios y hallen la distancia entre los extremos de las agujas, si estas miden 0,8 cm y 1,2 cm.

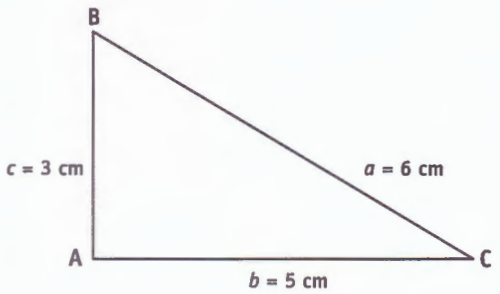
a) 15:00 h b) 15:48 h c) 01:12 h d) 20:00 h

35 En una clase de Matemática, la profesora les pidió a sus alumnos que hallaran gráficamente la medida del lado a de un triángulo, teniendo como datos $b = 5$ cm, $c = 3$ cm y $\hat{C} = 30°$.

Pablo resolvió así:



Gustavo resolvió así:



a) ¿A qué se debe la diferencia?

b) Resuelvan analíticamente el triángulo utilizando el teorema del coseno.

c) Repitan la resolución anterior, pero utilizando el teorema del seno.

d) ¿Qué información se debe conocer para que la solución al problema sea única?

36 Yanina envió a Jésica y Gisel, compañeras de escuela, una invitación a su casa que decía lo siguiente:
"Podrán llegar a mi casa con estos datos: la distancia entre sus casas es 0,8 km; la distancia entre mi casa y la de Jésica es de 0,5 km. Si consideramos un triángulo cuyos vértices son nuestras casas, el ángulo que se forma en la casa de Gisel es de 28°".

a) ¿Podrán llegar a la casa de Yanina con la información de la invitación?

.....

b) Realicen un esquema para la ubicación de las tres casas.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La trigonometría y la imagen satelital

En la transmisión satelital, intervienen, entre otros dispositivos, una antena parabólica y un satélite geoestacionario. La orientación de las antenas parabólicas domiciliarias puede verificarse mediante fórmulas que incluyen razones trigonométricas.

Esta orientación depende de la medida de dos ángulos: el de elevación $\hat{E}$, que indica cuánto hay que elevar la antena desde el horizonte para localizar el satélite en cuestión, y el azimut $\hat{A}$, que determina el ángulo horizontal con que es preciso girar el eje de la antena.

De estos ángulos, se conocen las siguientes expresiones:

$$\cos \hat{E} = \frac{(R+h)\sqrt{1-\cos^2 f.\cos^2 Ltr}}{D} \qquad \text{y sen } \hat{A} = \frac{sen\, f}{\sqrt{1-\cos^2 f.\cos^2 Ltr}}$$

Las constantes terrestres y otras variables auxiliares que intervienen son:

- R: radio terrestre ecuatorial, 6378,16 km.
- h: distancia desde el satélite hasta el Ecuador terrestre, 35 786,3 km.
- Lgs: ubicación del satélite sobre el plano del Ecuador.
- Lgr: longitud del punto de recepción (respecto del meridiano de Greenwich).
- Ltr: latitud del punto de recepción (respecto del Ecuador).
- $f = Lgs - Lgr$
- $D = \sqrt{h^2 + 2\,.\,R\,.\,(R+h)\,.\,(1-\cos f.\cos Ltr)}$

37 En la ciudad de Ushuaia (situada a 54° de latitud sur y a 68° de longitud oeste), se quiere instalar una antena parabólica con orientación hacia el satélite Nahuel 1, que está situado a 71° 48' longitud oeste.

Determinen si esa antena está bien orientada con un ángulo de elevación de 28° 17' 15" y con un azimut de 4° 41' 36".

.....

.....

.....

.....

.....

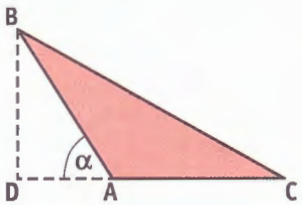
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las razones trigonométricas en la historia

38 En el libro II de los *Elementos* de Euclides (Alejandría, siglo IV a. de C.), aparece la siguiente proposición:

En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso. (Euclides; II, 12).



Simbólicamente, para el triángulo ABC de la figura, la relación que describió Euclides es:

$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AC}$ (I)

Como $\cos \alpha = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$ y $\cos (180^\circ - \alpha) = -\frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$ (ver act. 40), la expresión (I) podemos escribirla:

$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BA} \cdot \cos (180^\circ - \hat{\alpha})$

a) ¿Con qué contenido desarrollado en este capítulo, pueden identificar la proposición anterior?

Para la demostración de esta proposición, Euclides utiliza el teorema de Pitágoras y la proposición 4 del libro II, que dice:

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos).*

En el lenguaje algebraico que manejamos hoy, la proposición anterior puede expresarse así:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

Euclides parte del triángulo obtusángulo BAC y traza el segmento DB, perpendicular a la recta que contiene al lado CA. La base del triángulo rectángulo BDC puede considerarse cortada al azar en el punto A, y se puede aplicar, entonces, la proposición 4 del libro II.

b) Escriban la expresión que se obtiene mediante el procedimiento descrito.

A partir de la expresión anterior, Euclides suma en ambos miembros el cuadrado de DB y, a continuación, aplica el teorema de Pitágoras en los triángulos BDA y BDC.

c) Completen la demostración de Euclides.

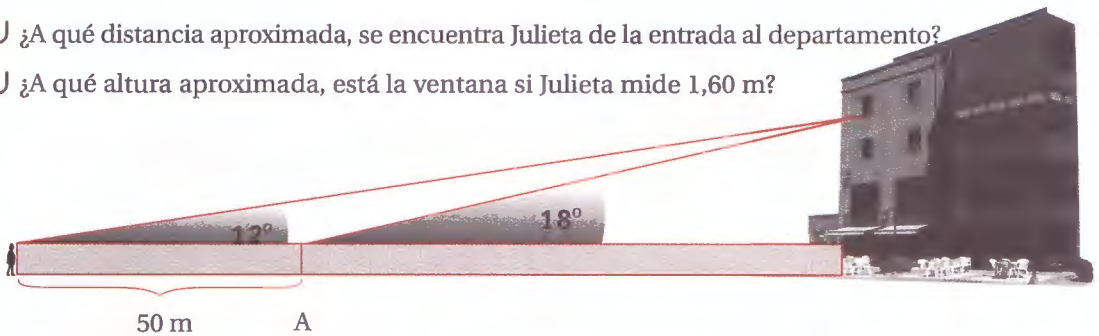
*Euclides se refiere al segmento.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

39 Julieta divisa la ventana del departamento de Romeo con un ángulo de elevación de 12°. Camina 50 m hacia el departamento, hasta el punto A, que muestra el esquema, y lo observa con un ángulo de elevación de 18°.

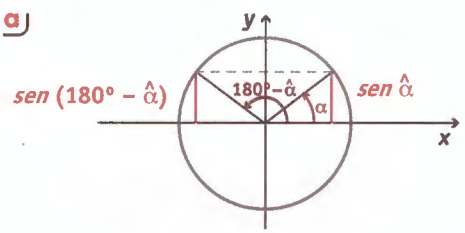
a) ¿A qué distancia aproximada, se encuentra Julieta de la entrada al departamento?

b) ¿A qué altura aproximada, está la ventana si Julieta mide 1,60 m?



40 Tracen en cada circunferencia los segmentos asociados al seno, al coseno y a la tangente de los ángulos señalados, y luego completen las igualdades.

a)

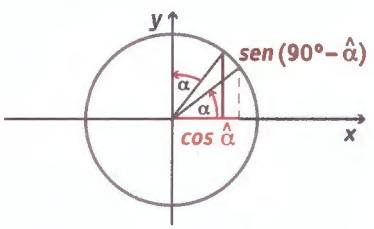


$sen\ (180° - \hat{\alpha}) = sen\ \hat{\alpha}$

$cos\ (180° - \hat{\alpha}) = -cos\ \hat{\alpha}$

$tg\ (180° - \hat{\alpha}) =$

c)

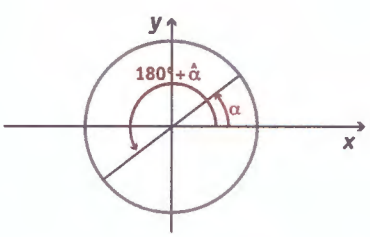


$sen\ (90° - \hat{\alpha}) = \cos \hat{\alpha}$

$cos\ (90° - \hat{\alpha}) =$

$tg\ (90° - \hat{\alpha}) =$

b)

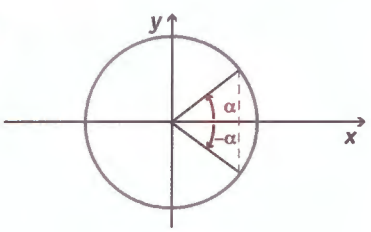


$sen\ (180° + \hat{\alpha}) =$

$cos\ (180° + \hat{\alpha}) =$

$tg\ (180° + \hat{\alpha}) =$

d)



$sen\ (-\hat{\alpha}) =$

$cos\ (-\hat{\alpha}) =$

$tg\ (-\hat{\alpha}) =$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

41 La suma de dos ángulos es de 1632° y su diferencia, $\frac{64}{15}\ \pi$ radianes. ¿Cuál es, en radianes, la medida de cada ángulo?

42 Representen gráficamente las rectas L_1, L_2 y L_3, tales que:

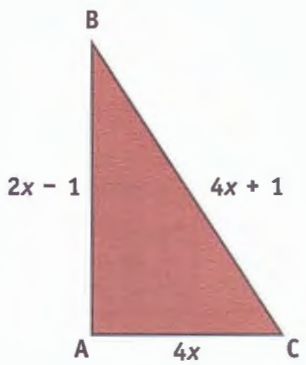
$$L_1: y = x\ ;\ L_2: y = -x + 8\ ;\ L_3: y = \frac{1}{3}x.$$

a) Clasifiquen el triángulo que determinan las tres rectas.

b) Calculen, en forma exacta, el perímetro y el área del triángulo.

c) Hallen los valores del seno, del coseno y de la tangente de cada ángulo agudo del triángulo.

43 En el triángulo rectángulo ABC, las medidas de los lados (expresadas en centímetros) son las que se muestran en la figura.
Hallen el perímetro, el área y la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC.



44 Indiquen la medida de los primeros cinco ángulos positivos con el mismo lado terminal que –7220°.

45 En un triángulo ABC cuyo perímetro es 20 cm, las medidas de los lados (expresadas en centímetros) son:

$$\overline{AB} = 15 - 3x;\ \overline{BC} = x^2 - 1,\ \text{y}\ \overline{CA} = 12 - 2x.$$

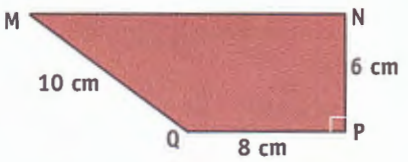
Hallen la medida de los ángulos interiores:

a) Si el triángulo es isósceles.

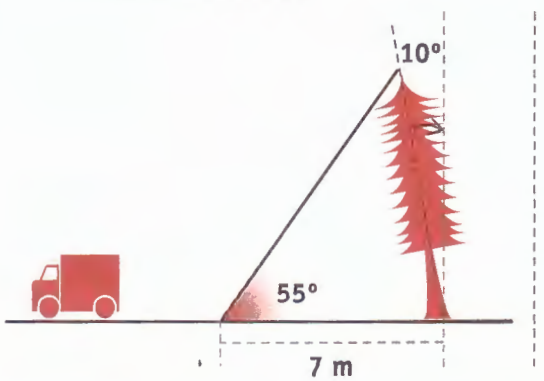
b) Si el triángulo es escaleno.

46 Si en un triángulo oblicuángulo ABC se conocen las medidas de los lados AC y BC y la del ángulo comprendido entre ambos, ¿cómo podrían expresar una fórmula para calcular el área del triángulo a partir de las medidas conocidas?

47 Calculen la medida de las diagonales del cuadrilátero de la figura.



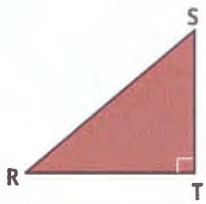
48 Una tormenta de viento inclinó un pino como se muestra en el dibujo. ¿A qué "distancia prudencial" tiene que estar ubicado el camión para no correr riesgos de que el pino caiga encima de él?



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

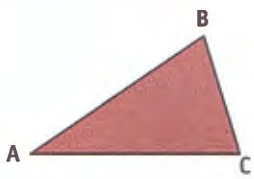
49 Calculen el perímetro, el área y los ángulos interiores de cada triángulo.

a)



$\hat{R} = x$
$\hat{S} = x + 20°$
$\overline{ST} = 10$ cm

b)

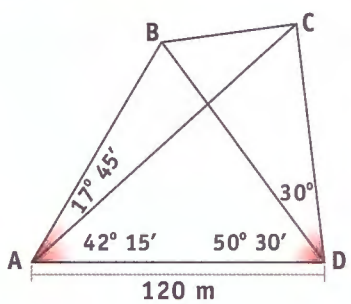


$\hat{A} = x - 10°$
$\hat{B} = x + 20°$
$\hat{C} = 2x$
$\overline{BC} = 12$ cm

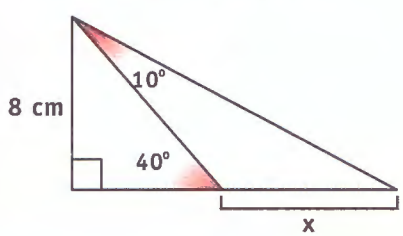
c)

$\overline{MN} = x$ cm
$\overline{NP} = (4x + 1)$ cm
$\overline{MP} = (4x - 1)$ cm

50 Hallen el perímetro del cuadrilátero.



51 En el triángulo rectángulo de la figura, hallen la medida exacta de x.



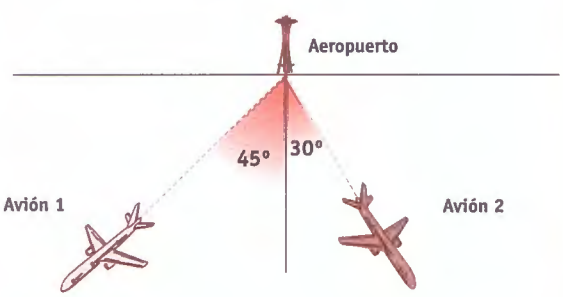
52 En un partido de fútbol, se cobra penal. El jugador encargado de ejecutarlo ubica la pelota a 9,15 metros del arco, equidistante de ambos palos. El jugador patea, sin comba, al ras del piso, a 23° a la derecha de la línea perpendicular al arco. El arquero se tira, por intuición, hacia el otro lado. Tengan en cuenta que el largo del arco es 7,15 metros y averigüen si ese tiro de penal es gol.

53 Julio y Aníbal tienen sus casas en el campo a una distancia de 500 m. Ambos divisan un helicóptero volando entre ellos. Julio lo ve con un ángulo de elevación de 80°, y Aníbal está a una distancia de 600 m del helicóptero.

a) ¿A qué altura, está el helicóptero?

b) ¿A qué distancia del helicóptero, se encuentra Julio?

54 Dos aviones parten del mismo aeropuerto a la misma hora. El avión 1 vuela a una velocidad constante de 200 km/h, y el avión 2, a una velocidad constante de 250 km/h. ¿A qué distancia entre sí, se encuentran los aviones después de volar 5 horas?



55 Dos ángulos de $-140°$ y de $\frac{101}{9}\pi$, respectivamente, ¿tienen el mismo lado terminal?

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 El ángulo α mide 2000°, entonces:

- a) está en el cuarto cuadrante.
- b) tiene coseno positivo.
- c) tiene el mismo lado terminal que $\hat{\beta} = -160°$.
- d) no tiene definida la tangente.

2 Los lados del $\overset{\Delta}{ABC}$ miden 10 cm, 11 cm y 12 cm.
El mayor de sus ángulos tiene una amplitud aproximada de:

- a) 159° 30'
- b) 249° 30'
- c) 69° 30'
- d) 110° 30'

3 En un trapecio isósceles, la base menor mide $\sqrt{45}$ cm; los lados no paralelos, $\sqrt{20}$ cm, y la altura, $\sqrt{15}$ cm. En relación con este trapecio, se puede afirmar:

- a) que el perímetro exacto es $20\sqrt{3}$ cm.
- b) que la superficie exacta es $12\sqrt{5}$ cm^2.
- c) que cada ángulo agudo mide la mitad que cada ángulo obtuso.
- d) que la suma exacta de las diagonales es $\sqrt{95}$ cm.

4 En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7 cm más que el otro, y la hipotenusa, el doble del cateto menor aumentado en 3 unidades. Entonces :

- a) El perímetro del triángulo es 60 cm.
- b) La tangente del ángulo agudo mayor es menor que 1.
- c) El coseno del ángulo agudo mayor es $\frac{12}{13}$.
- d) El seno de cada ángulo agudo es igual al coseno de su complemento.

5 Los lados del triángulo ABC miden 12 cm, 35 cm y 37 cm, respectivamente; los del triángulo MNP, miden 36 cm, 45 cm y 27 cm; los del triángulo RST, 81 cm, 35 cm y $\sqrt{5336}$ cm. Entonces :

- a) Alguno de los tres triángulos no es rectángulo.
- b) El ángulo menor del $\overset{\Delta}{ABC}$ mide menos de 18°.
- c) El ángulo menor del $\overset{\Delta}{MNP}$ mide menos de 36°.
- d) La razón entre las áreas del $\overset{\Delta}{ABC}$ y del $\overset{\Delta}{MNP}$ es igual al coseno del mayor de los ángulos agudos del $\overset{\Delta}{RST}$.

6 Las agujas de un reloj miden 0,9 cm y 1,3 cm y marcan las 09:22 h.
El ángulo cóncavo que forman las agujas y la distancia entre sus extremos son, respectivamente:

- a) 211° y 3 cm.
- b) $\frac{211}{180}\pi$ y 2,12 cm.
- c) $\frac{149}{180}\pi$ y 2,12 cm.
- d) 149° y 3 cm.

7 De un triángulo ABC, de 150 cm^2 de área, se sabe que $\overline{BC}$ = 15 cm, y que $\hat{B}$ = 30°. Entonces:

- a) $\overline{AB}$ mide 28,03 cm.
- b) $\overline{AC}$ mide 40 cm.
- c) $\hat{C}$ mide más de 46°.
- d) El perímetro del $\overset{\Delta}{ABC}$ es 83,03 cm.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

7 ESTADÍSTICA

El estudio y comprensión de los *métodos estadísticos* provee a los profesionales de diversas áreas de la ciencia una herramienta fundamental en el campo de la investigación. También es de gran utilidad para las empresas que desean lanzar al mercado un nuevo producto o para los medios de difusión que desean predecir el resultado de una elección.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Hallen la ecuación de la recta que cumple con las condiciones indicadas en cada caso.

a) Tiene pendiente 2 y contiene el punto (–2; 5).

b) Pasa por los puntos (2; 3) y (–5; –4).

c) Pasa por el punto (2; –1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (3; 2) y (5; 8).

2 Indiquen las ternas de puntos que están alineados.

a) A = (2; 5) B = (7; 2) C = (–5; 4)

b) M = (2; –1) N = (–3; –9) O = (8; 13)

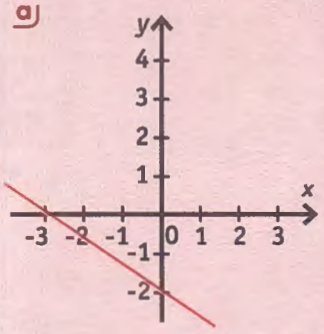
c) P = (5; 1) Q = (7; 2) R = (9; 3)

3 Grafiquen las siguientes funciones.

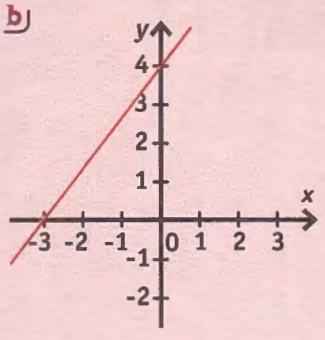
a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$ c) $y = -\frac{3}{2}x + 0{,}5$

4 Hallen la fórmula de las funciones graficadas.

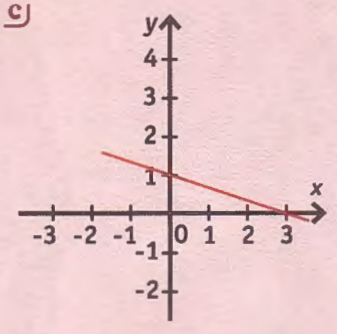
a)



b)



c)



5 Una remera costaba, en el inicio de la temporada, $45.

a) Calculen el precio con un recargo del 15%.

b) Calculen el precio con un descuento del 20%.

c) Hallen la variación porcentual del precio de la remera si al final de la temporada costaba $35.

6 Consideren las siguientes expresiones.

a) $R = \frac{x + 2}{t^2}$ b) $R - t = \frac{(x - 5)^2}{R}$

I. Despejen x.

II. Hallen el valor de x para $R = 9$ y $t = 4$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Introducción

Para leer y recordar

- La *estadística* es una ciencia que se dedica a recolectar, organizar y computar datos con el objeto de inferir conclusiones sobre ellos.
- El conjunto de individuos, que pueden ser personas o no, sobre los que se quiere obtener la información se llama *población*.
- En muchos casos, sólo es posible trabajar con una parte de la población. A ese conjunto, se lo llama *muestra*.
- Un estudio realizado sobre toda la población se llama *censo*. Cuando el estudio se realiza sobre una muestra se lo denomina *muestreo*.
- Las características que se estudian en una muestra o población se llaman *variables*. Estas se clasifican de acuerdo con el tipo de valor que tomen.
- Las *variables cuantitativas* son las que toman valores numéricos. Si los valores posibles de la variable se pueden enumerar, se dice que la variable es *discreta*. Cuando los valores son números reales se dice que la variable es *continua*.
- Las *variables cualitativas* son las que no toman valores numéricos. Si los valores que puede tomar la variable tienen un orden propio (por ejemplo: nunca, a veces, siempre), se dice que la variable es *ordenable*; en caso contrario, se dice que es *no ordenable* (por ejemplo: varón, mujer).

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

7 Un investigador está realizando un estudio sobre un nuevo protector solar, que un laboratorio está por lanzar al mercado. Para ello, selecciona a un grupo de personas, les pide que utilicen el protector y que se expongan al sol. Él registra cuántas horas dura la protección a las personas que colaboran con el estudio y si el producto les produce alguna molestia en la piel.

a) Diseñen una planilla que pueda utilizar el investigador para registrar sus observaciones.

b) ¿Cuáles son los valores posibles de cada una de las variables?

8 Completen la tabla.

Variable	Clasificación	Algunos valores posibles
Color de pelo de una persona		
		1,60 m; 1,75 m; 1,68 m.
Cantidad de peces en un estanque		
Cantidad de habitantes de un país		
Raza de un perro		
Cantidad de lluvia caída durante una tormenta		

El símbolo Σ

Para leer y recordar

- El símbolo Σ, *sumatoria*, se utiliza con frecuencia en las fórmulas estadísticas para facilitar su escritura.
- Para un conjunto de n números cuyos elementos se simbolizan a_i, escribimos en forma simplificada su suma de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Se lee: sumatoria de los elementos a_i desde i igual a 1 hasta n.

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \qquad \sum_{i=3}^{7} 3^i = 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3267$$

9 Completen.

a) $\sum_{i=1}^{4} (i-2)^2 = (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2 =$ .....

b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{5}$ ..... = ...

c) ..... $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$ .....

d) $\sum_{i=1}^{5} i^3 =$ ..... = ...

10 Resuelvan.

a) $\sum_{i=0}^{5} 2^i =$ .....

b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{k^2}{k+2} =$ .....

c) $\sum_{r=0}^{3} (3r^2 + 2r - 1) =$ .....

d) $\sum_{s=1}^{10} (-1)^s . s =$ .....

e) $\sum_{k=0}^{5} (2k+1) =$ .....

f) $\sum_{r=2}^{5} \left(\frac{r+1}{r} + \frac{r-1}{r+1}\right) =$ .....

11 Escriban en forma simplificada.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 =$ .....

b) $1 + 7 + 49 + 343 =$ .....

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Tablas de frecuencias

12 En el hall de un aeropuerto internacional, se entrevistó a los turistas que partían para preguntarles cuántas veces antes de esta habían tomado vacaciones en el exterior. Las respuestas de una muestra de entrevistados fueron las siguientes:

2	0	1	2	1	2	2	0	2	0	2	0	2	1	2	3	0	3	2	2
1	3	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	1	2	2	0	0	2	1

a) ¿Cuál es el tamaño de la muestra? .....

b) ¿Cuáles fueron los valores de la variable estudiada? .....

c) ¿Cuántas veces ocurrió cada valor? .....

d) ¿Qué fracción de los turistas salía al exterior por primera vez? .....

e) ¿Qué porcentaje de turistas ya lo habían hecho en dos oportunidades? .....

f) ¿Cuántas personas habían salido del país al menos una vez? .....

Para leer y recordar

- Las *tablas de frecuencias* permiten ordenar los datos de una muestra y leer la información en forma más clara. En una tabla de frecuencias, encontramos las siguientes simbolizaciones.
- n (tamaño de la muestra).
- f_a es la *frecuencia absoluta* (cantidad de veces que ocurre cada valor de la variable en la muestra).
- f_r es la *frecuencia relativa* (fracción del total de la muestra que corresponde a cada valor de la variable). $f_r = \frac{f_a}{n}$
- f_p es la *frecuencia porcentual* (porcentaje del total de elementos de la muestra que corresponde a cada valor de la variable). $f_p = f_r \cdot 100$
- f_{ac} es la *frecuencia acumulada* (frecuencia absoluta que se acumula hasta esa fila de la tabla) para una fila k cualquiera. $f_{ac_k} = \sum_{i=1}^{k} f_{a_i}$

13 En una empresa, se recabó información sobre la antigüedad que tenían sus empleados en el trabajo. Los valores obtenidos en una muestra de 30 empleados fueron los siguientes:

5	4	11	3	16	0	3	9	21	13	10	2	6	6	8
4	15	2	25	7	14	3	8	15	9	15	10	19	24	4

Antigüedad	f_a	f_r	f_p	f_{ac}
[0; 7)		$\frac{13}{30}$		
[7; 14)				
[14; 21)				
[21; 28)				
Totales				

a) Completen la tabla.

b) Calculen la fracción de empleados que tienen una antigüedad inferior a 14 años.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

14 Se tomó al azar una muestra de 30 CD de música, y se midieron sus duraciones (en minutos). Los resultados fueron los siguientes:

68,58; 48,52; 64,40; 68,50; 66,05; 63,95; 55,55; 51,35; 48,28; 65,26; 49,35; 50,36; 65,95; 65,90; 59,48; 41,35; 56,69; 63,65; 67,85; 59,65; 67,65; 68,45; 58,65; 64,28; 56,95; 57,65; 67,48; 49,65; 48,65; 67,65

a) Completen la tabla de frecuencias.

b) ¿Qué cantidad de CD en la muestra tiene una duración menor que 62 minutos?

.....

c) ¿Qué porcentaje de CD de la muestra tiene duración mayor o igual a 48 minutos?

.....

Duración (min)	f_a	f_r	f_p	f_{ac}
[41,00; 48,00)				
[48,00; 55,00)				
[55,00; 62,00)				
[62,00; 69,00)				
Totales				

d) ¿Qué fracción de los CD de la muestra tiene una duración entre 48 y 62 minutos?

.....

e) Si se hubiera querido armar la tabla con 5 intervalos, ¿cuáles habrían elegido?

.....

15 Las siguientes tablas de frecuencias muestran cómo se distribuyen los sueldos de los empleados de dos empresas.

Empresa A

Sueldos ($)	f_a	f_r	f_p	f_{ac}
[900; 1100)	15			
[1100; 1300)				35
[1300; 1500)				
[1500; 1700)			25	
Totales	120			

Empresa B

Sueldos ($)	f_a	f_r	f_p	f_{ac}
[800; 1100)			33,33	
[1100; 1400)	33	0,22		
[1400; 1700)				130
[1700; 2000)				
Totales	150			

a) Completen los datos que faltan en cada una.

b) ¿Cuál de las dos empresas paga mayor fracción de sueldos por debajo de $1100?

.....

16 La siguiente muestra corresponde a la duración (medida en horas) de pilas de bajo consumo.

1490; 1333; 1308; 1257; 1177; 1282; 1150; 1396; 1012; 1077; 1129; 1001; 1490; 1454; 1410; 1270; 1090; 1372; 1355; 1316; 1339; 1331; 1390; 1418; 1194; 1223; 1471; 1208; 1421; 1165

a) Construyan una tabla de frecuencias con 3 intervalos.

b) Construyan una tabla de frecuencias con intervalos de longitud 100 horas.

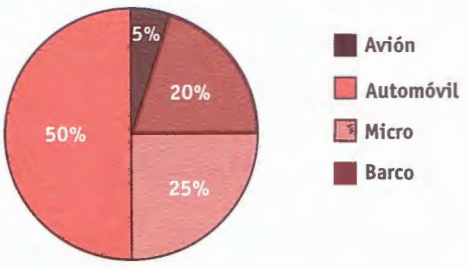
c) Construyan una tabla de frecuencias que les permita calcular el porcentaje de pilas que duraron menos de 1375 horas.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Gráficos estadísticos

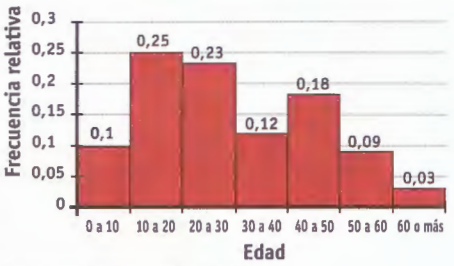
17 Observen los siguientes gráficos indicadores de la actividad turística en Playa Amarilla.

Distribución de los pasajeros según el medio de transporte utilizado. Verano de 2006.



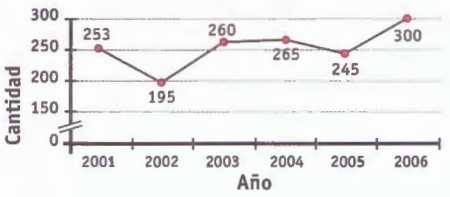
Fuente: Secretaría de Transporte.

Turistas según la edad (en millones). Temporada 2006.



Fuente: Secretaría de Turismo.

Cantidad de turistas (en miles)



Fuente: Secretaría de Turismo.

a) ¿Cuántos turistas arribaron a Playa Amarilla en el verano de 2006?

b) ¿Cuántos de ellos lo hicieron en automóvil?

c) ¿En qué porcentaje, disminuyó la afluencia de turistas en 2002 respecto de 2001?

d) ¿Cuántos turistas de 50 años o más arribaron a Playa Amarilla en el verano de 2006?

e) ¿En qué año, se dio el mayor incremento en la afluencia turística?

f) ¿En qué porcentaje, respecto del año anterior?

Para leer y recordar

- *Gráfico circular:* se utiliza para analizar la participación de cada categoría de la variable en el total de la muestra.
- *Histograma:* se utiliza para representar tablas de frecuencias que están expresadas por intervalos.
- *Gráfico de líneas:* se utiliza para analizar la evolución de una variable en el tiempo. Las rayitas sobre el eje vertical indican que se "corta" una parte del eje para poder respetar la proporción de la escala. Este criterio también puede aplicarse al eje horizontal. Es importante considerar que, si bien se parecen a las gráficas de funciones continuas, no lo son porque no representan la relación funcional entre las dos variables.
- Al realizar un gráfico, es importante indicar:
  - la variable que se representa y la unidad de medida en el título;
  - el tipo de frecuencia que se está utilizando, para evitar confusiones;
  - la fuente de información de donde se obtuvieron los datos, al pie del gráfico.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

18 En la siguiente matriz de datos, se observan los resultados de una investigación sobre el uso de Internet por parte de los usuarios que están abonados al servicio de una compañía.

Serv.	Ant.	Horas	Serv.	Ant.	Horas	Serv.	Ant.	Horas
TE	2,88	135	TE	1,84	213	TE/FI	1,61	141
TE/FI	1,19	98	TE/FI	1,98	62	TE	1,09	211
TE/FI	2,89	212	TE/FI	2,29	183	FI	2,50	144
TE	1,31	245	TE	1,86	81	TE	2,20	231
TE	2,60	120	TE/FI	1,53	181	TE	0,99	117
TE	2,68	99	TE	0,02	147	FI	0,04	196
TE	0,05	133	TE	0,66	215	TE	1,20	81
TE	1,94	54	TE	0,40	242	TE	1,51	33
TE/FI	1,88	179	TE	1,49	161	TE	0,59	134
TE	0,66	113	TE/FI	0,27	87	FI	2,32	244

Serv.: tipo de servicio. **TE:** línea telefónica **TE/FI:** línea telefónica + fibra óptica. **FI:** cable de fibra óptica. **Ant.:** tiempo (en años) que lleva abonado a la compañía. **Horas:** horas que estuvo conectado en el último mes.

a) Construyan un gráfico circular con la distribución porcentual de la variable *tipo de servicio* (realicen previamente la tabla de frecuencias).

b) Construyan un histograma de frecuencias relativas con la *cantidad de horas* que los usuarios estuvieron conectados a Internet durante el último mes (realicen previamente la tabla de frecuencias).

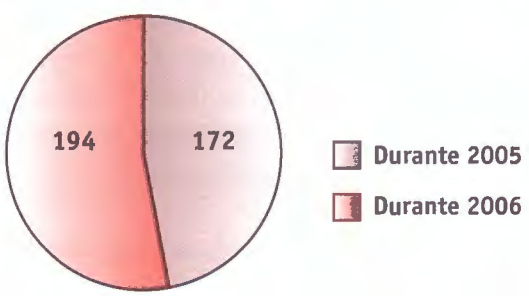
c) Construyan un gráfico circular de la distribución de los clientes por categoría (A: menos de un año de antigüedad; B: entre 1 y 2 años de antigüedad; C: más de 2 años de antigüedad). Realicen previamente la tabla de frecuencias.

19 Observen el siguiente gráfico que representa la cantidad de parejas inscriptas en el certamen de baile de tango en un club de barrio durante 2005 y 2006.

a) Analicen si el tipo de gráfico elegido es el adecuado.

b) Si consideran incorrecta la elección, realicen un nuevo gráfico para la variable.

Parejas inscriptas al certamen de tango



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

20 La siguiente tabla representa la producción de frutas de una cooperativa agraria.

Campaña	Frutas (en toneladas)			
	Naranjas	Limones	Mandarinas	Pomelos
2002	58,5	4,0	5,5	3,6
2003	98,7	8,6	7,4	5,7
2004	110,3	9,1	7,7	5,9
2005	122,9	8,7	7,9	5,5
2006	124,8	8,9	8,2	5,3

a) Construyan un gráfico de líneas para comparar la evolución de la producción de limones y la de mandarinas.

b) Construyan un gráfico de líneas para representar la evolución de la producción de frutas utilizando el total de la producción de cada año.

c) Construyan un gráfico circular con la distribución de la producción por tipo de frutas en la campaña 2006.

d) ¿Cuál de las producciones de frutas manifiesta mayor crecimiento en la última campaña respecto de la primera?

21 Observen la tabla y los dos gráficos construidos a partir de ella. El primero tiene rectángulos de igual base y la altura proporcional a la frecuencia absoluta. El segundo tiene rectángulos de distinta base (los intervalos no tienen la misma longitud), y su área es proporcional a la frecuencia absoluta.

Intervalo	f_a
[0; 2,5)	15
[2,5; 5)	5
[5; 7,5)	10
[7,5; 10)	15

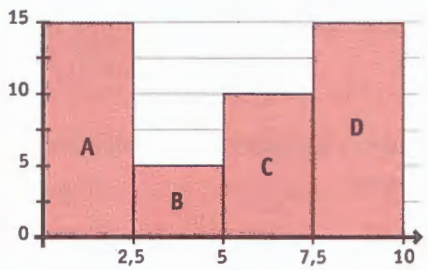


Gráfico A

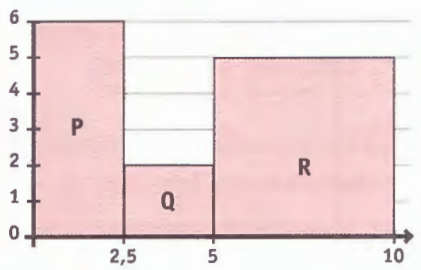


Gráfico B

a) ¿Cuál de los dos gráficos les resulta de más clara lectura?

.....

b) A partir de los datos de la tabla, analicen la manera de construir el gráfico B.

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Medidas de tendencia central

Para leer y recordar

- La *media* o el *promedio* ($\bar{x}$) de una muestra es el promedio aritmético de sus valores.

Se puede calcular con la fórmula $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

- La *mediana* (M) de una muestra es el valor de la variable tal que la mitad de las observaciones son menores o iguales que ella.

Para hallarla, ordenamos los datos y determinamos la mediana de acuerdo con la cantidad de observaciones.

- Si la cantidad de observaciones es impar, elegimos el valor del medio.
- Si la cantidad de observaciones es par, calculamos el promedio de los dos valores centrales.

- La *moda* (M_o) de una muestra es el valor de la variable que ocurre con mayor frecuencia.

Ejemplo:

Las edades de 5 alumnos son 14; 15; 18; 16; 15.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{14 + 15 + 18 + 16 + 15}{5} = 15{,}6$$

Ordenando los datos, tenemos:

14; 15; 15; 16; 18.

Por lo tanto:

M = 15 años; M_o = 15 años; $\bar{x}$ = 15,6 años.

22 Calculen la media, la moda y la mediana de los datos de las siguientes muestras.

a) Cantidad de jabón en polvo utilizado por 10 familias en un mes (en kilogramos).

2,8 3 1,5 1,2 0,6 5,2 3,3 2,8 3 4,1

b) Facturación de una empresa durante los meses del primer semestre del año (en pesos).

125 276 128 629 238 495 385 429 276 547 193 857

23 Las dos muestras siguientes corresponden a los precios al público, en pesos, de los modelos de pantalones de dos locales de un *shopping center*.

Local A					
102	110	95	125	135	85

Local B				
95	105	85	98	102

a) Calculen el precio promedio y mediano de cada local.

b) Aumenten en los dos locales el precio de los pantalones en un 15%. Calculen la media de los nuevos precios y compárenla con la anterior.

c) Disminuyan cada uno de los precios originales en $5. Calculen la media de los nuevos precios y compárenla con el promedio original.

d) Sobre la base de lo observado en b) y c) respondan a las siguientes preguntas.

I. Si el local C vende pantalones con un precio promedio de $83, y decide liquidar sus existencias disminuyendo el precio de cada modelo en $25, ¿cuál será el nuevo precio promedio?

II. ¿Cuál será el nuevo precio promedio si, en cambio, decide aumentarlos en un 22%?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para leer y recordar

Cuando los datos aparecen en tablas de frecuencias agrupados en intervalos, podemos aplicar las siguientes fórmulas de aproximación.

- *Media:* $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{mi} \cdot f_i}{n}$ (x_{mi} es el punto medio de cada intervalo y f_i su frecuencia absoluta).
- *Mediana:* la posición del intervalo que contiene a la mediana se puede hallar mediante el cociente $\frac{n}{2}$ y luego, aplicar: $M = L + \frac{\left(\frac{n}{2} - f_{an}\right) \cdot I}{f_a}$ (n es el tamaño de la muestra; f_{an} es la frecuencia acumulada del intervalo anterior al que contiene la mediana; I es la longitud del intervalo mediano; L es su límite inferior, y f_a, su frecuencia absoluta).
- *Moda:* se toma como valor aproximado el punto medio del intervalo de mayor frecuencia.

Ejemplo:

Ingresos mensuales de 100 familias.

	Ingresos ($)	f_a	f_{ac}	x_{mi}
M_o	[900; 1100)	38	38	1000
M	[1100; 1300)	29	67	1200
	[1300; 1500)	19	86	1400
	[1500; 1700)	14	100	1600

$$\bar{x} = \frac{1000 \cdot 38 + 1200 \cdot 29 + 1400 \cdot 19 + 1600 \cdot 14}{100} = 1218$$

Para la mediana, ubicamos su posición mediante el siguiente cálculo:

$$M = \overbrace{1100}^{L} + \frac{\left(\overbrace{\frac{100}{2}}^{\frac{n}{2}} - \overbrace{38}^{f_{an}}\right) \cdot \overbrace{200}^{I}}{\underbrace{29}_{f_a}} = 1182{,}75$$

$$M_o = \frac{900 + 1100}{2} = 1000$$

Por lo tanto, la media es, aproximadamente, $1218; la mediana es $1182,75, aproximadamente, y la moda es, aproximadamente, $1000.

24 La siguiente tabla corresponde a los valores de las facturas telefónicas de 200 familias de una ciudad.

a) Completen la tabla con datos inventados por ustedes.

b) Aproximen la media, la moda y la mediana.

c) Construyan un histograma con las frecuencias y ubiquen los valores hallados.

Precios	f_a	f_r	f_{ac}	x_{mi}
[60; 90)				
[90; 120)				
[120; 150)				
[150; 180)				
[180; 210)				
Totales				

25 Aproximen las medidas de tendencia central de la muestra de tiempos (en minutos) que tardan los operarios de una fábrica en armar una pieza, representada por el histograma, y ubíquenlas en la gráfica.

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Medidas de posición

Para leer y recordar

- El *percentil k* (P_k) es el valor de la variable tal que el k por ciento de los valores de la muestra son menores o iguales que él.

Ejemplo:

Si P_{35} (el percentil 35) de una muestra de sueldos es $1020, significa que el 35% de los empleados ganan $1020 o menos, o que $1020 es el sueldo máximo que gana el 35% de los empleados de menor remuneración.

- El *cuartil k* (Q_k) surge de dividir la muestra en cuatro partes de igual frecuencia (25%). Los cuartiles están relacionados entonces con los percentiles, de modo tal que $Q_1 = P_{25}$; $Q_2 = P_{50} = M$; $Q_3 = P_{75}$.

Ejemplo:

Si Q_1 (el primer cuartil) de una muestra de pesos de bebés recién nacidos es 2,540 kg, significa que el 25% de los bebés de la muestra pesan 2,540 kg o menos.

- Para calcular los *percentiles*, se utiliza la misma fórmula que para el cálculo de la mediana, diferenciándose solamente en que la posición de un *percentil k* está indicada por la fórmula $\frac{n \cdot k}{100}$, donde n representa el tamaño de la muestra.

26 Se prueba un medicamento para los dolores de cabeza en 50 pacientes que manifiestan padecerlos con frecuencia. La tabla que sigue representa el tiempo en horas que tardó el medicamento en aliviar por completo el dolor de cabeza de cada paciente.

Tiempo (h)	f_a	f_{ac}
[0,0; 0,5)	8	8
[0,5; 1,0)	13	21
[1,0; 1,5)	15	36
[1,5; 2,0)	8	44
[2,0; 2,5)	6	50

a) Calculen P_{57} tomando como ejemplo el cálculo del P_{38}.

El P_{38} está ubicado en la posición $\frac{50 \cdot 38}{100} = 19$, entonces:

$$P_{38} = 0{,}5 + \frac{(19 - 8) \cdot 0{,}5}{13} = 0{,}92 \text{ h}$$

.....

b) Hallen la moda, la media y la mediana.

.....

c) Hallen los cuartiles 1 y 3. Interpreten los resultados obtenidos.

.....

d) Aproximen el tiempo máximo en que hizo efecto el medicamento al 70% de los pacientes que se recuperaron más rápidamente.

.....

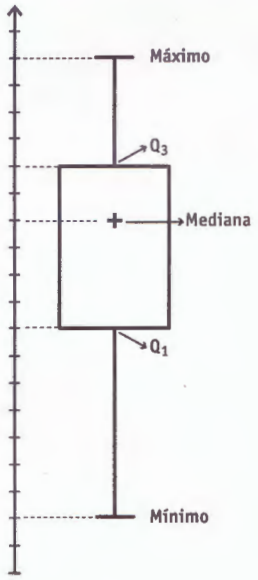
e) Calculen el porcentaje de pacientes que tardaron menos de 2 horas en recuperarse.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Gráfico de caja

Para leer y recordar

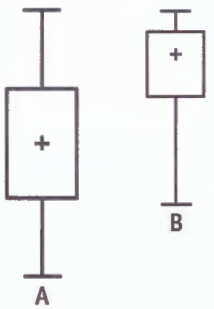


- Un *gráfico de caja* o *boxplot*, se construye a partir del máximo, el mínimo y los cuartiles, según el esquema de la izquierda.
- La utilidad de estos gráficos reside en que, con muy pocos datos, se tiene una idea de la *dispersión* y *simetría* de los datos.

Ejemplo:

Los dos gráficos de caja de la figura se corresponden con los sueldos de 10 empleados de dos empresas. En ellos se puede observar que la muestra A es más dispersa (tiene los datos más "desparramados") y que la muestra B es asimétrica (o sea que tiene los datos más concentrados en uno de los extremos), en este caso, acumulada más cerca del máximo.

En el contexto descripto, se puede afirmar que en la empresa A los sueldos son más heterogéneos (están distribuidos de manera más uniforme) y que en la empresa B hay mayor proporción de empleados con sueldos elevados.



27 En una zona de veraneo, se preguntó a 200 jóvenes sobre el dinero que manejaban durante sus vacaciones (promedio por día). Los datos obtenidos fueron volcados en la siguiente tabla de frecuencias.

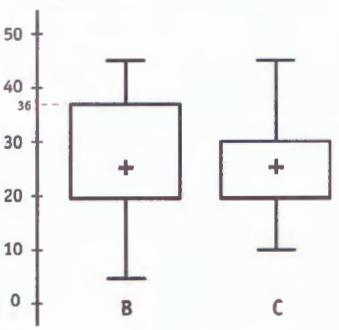
Dinero ($)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Frecuencia	107	69	9	13	2

a) Construyan un *boxplot A* para los datos de la tabla.

b) Describan las características de la muestra.

c) Construyan un histograma y comparen el gráfico con las características analizadas en la lectura del *boxplot*.

d) En otras dos zonas de veraneo, se recabó la misma información, y se obtuvieron los *boxplots B* y *C* que se muestran en la figura. Comparen las características de la variable en las tres zonas.



28 Los datos de la tabla de frecuencias corresponden a las ventas de fin de semana en tres locales de una cadena de ropa informal ubicados en un centro comercial.

Ventas ($)	[1500; 2000)	[2000; 2500)	[2500; 3000)	[3000; 3500)	[3500; 4000)
Local A	7	10	3	3	2
Local B	3	5	12	5	5
Local C	1	3	9	10	7

a) Construyan los *boxplots* para los tres locales.

b) Analicen los resultados obtenidos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Medidas de dispersión

29 Los datos que siguen corresponden a los sueldos de los empleados de dos empresas.

Empresa A	1300	1400	1500	1500	1600	1700
Empresa B	800	1000	1500	1500	2000	2200

a) Calculen la media, la moda y la mediana de cada empresa.

b) Comparen los resultados obtenidos.

c) ¿En cuál empresa, les conviene ingresar para ocupar un cargo de alto rango? ¿Y de bajo rango?

Para leer y recordar

Muchas veces, para explicar el comportamiento de una variable mediante los datos de una muestra, no es suficiente conocer la media, la moda y la mediana, sino que se hace necesario conocer cómo se distribuyen los datos alrededor de esos valores. Para ello, se utilizan las medidas de dispersión.

- ***Rango*** **(*R*): es la más simple de las medidas de dispersión.** R **= Máximo − Mínimo**
- ***Varianza*** **(S^2): es una medida de la dispersión de los valores de la variable respecto del promedio. (Para evitar confusiones, omitiremos las unidades en las que queda expresada en cada caso).**

Para muestras simples:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Para datos agrupados por intervalos:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_{mi} - \bar{x})^2 \cdot f_{a_i}}{n}$$

(x_{mi}: punto medio de cada intervalo; f_{a_i}: frecuencia absoluta; k: cantidad de intervalos).

- ***Desvío estándar*** **(S): es la que se utiliza más habitualmente por estar expresada en las mismas unidades que el promedio.** $S = \sqrt{S^2}$
- ***Coeficiente de variación*** **(CV): indica la relación entre la media y el desvío estándar. Se utiliza para analizar la homogeneidad de una muestra o población. Cuanto mayor sea la medida del coeficiente de variación, menos homogénea se considera la muestra, es decir que los datos están más dispersos respecto del promedio.** $CV = \frac{S}{\bar{x}}$

30 En la cámara frigorífica de una fábrica, se tomaron 30 mediciones de temperatura (en °C) en distintos momentos del día.

3,4	3,2	3,5	3,8	3,4	3,8	3,2	3,2	3,1	3,4	3,1	3,7	3,7	3,8	3,1
3,4	3,7	3,5	3,1	3,6	3,7	3,8	3,6	4,0	4,0	3,2	3,2	3,1	3,1	3

a) Calculen la media, el desvío estándar y el rango.

b) Calculen el coeficiente de variación y compárenlo con el de la otra cámara que tiene la empresa, que dio una temperatura promedio de 3 °C y un desvío de 0,35 °C.

c) ¿Cuántas veces está el desvío estándar contenido en el rango, aproximadamente?

31 Un fotógrafo que trabaja para fiestas y otros eventos lleva el registro de sus ingresos mensuales en sus libros contables. La facturación de 50 meses de trabajo se refleja en la siguiente tabla de frecuencias.

Facturación mensual ($)	[0; 750)	[750; 1500)	[1500; 2250)	[2250; 3000)
Frecuencia	32	12	4	2

a) Hallen la media, la mediana y la moda.

.....

.....

b) Hallen el desvío estándar de la facturación mensual del fotógrafo.

.....

.....

c) Calculen el coeficiente de variación y analicen la homogeneidad de la muestra.

.....

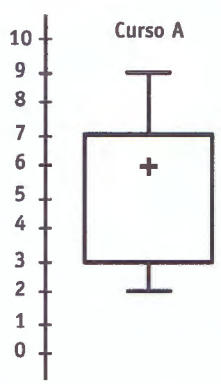
.....

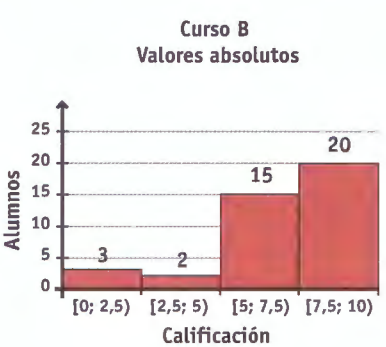
d) Construyan un *boxplot* y compárenlo con la información obtenida analíticamente.

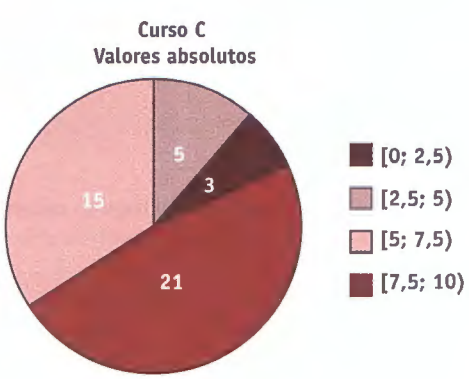
.....

.....

32 Luego de un curso intensivo de estadística, tres profesoras de Lengua participaron de una evaluación distrital de rendimiento de sus alumnos. Cada una tomó en sus cursos una prueba estandarizada, y, posteriormente, ellas presentaron los resultados de la siguiente manera:







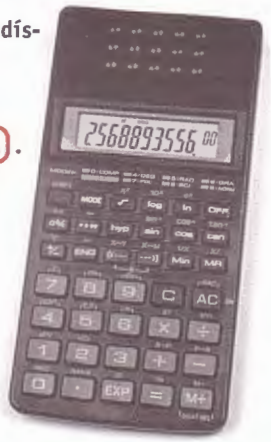
Construyan los *boxplots* de los cursos B y C y efectúen un análisis comparativo del rendimiento de los tres cursos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

Uso de la calculadora para calcular la media y el desvío estándar

- Habiliten en la calculadora el modo estadístico oprimiendo la secuencia de (MODE) (.) . En el visor de la calculadora, aparecerá la indicación *SD*.
- Borren los datos que pudieran tener guardados en la memoria del modo estadístico oprimiendo la secuencia de teclas (SHIFT) (AC).



Para datos simples:

- Ingresen los datos de la muestra de uno en uno oprimiendo cada vez la tecla (DATA).
  Ejemplo: (6), (DATA) , (9) , (DATA) , etcétera.

Para datos agrupados:

- Ingresen para cada intervalo X_{mi}, (X), f_a, (DATA).

En ambos casos:

- Para calcular la media, opriman (SHIFT) ($\bar{X}$).
- Para calcular el desvío estándar, opriman (SHIFT) (σ_n).

33 En un organismo de defensa del consumidor analizaron el contenido (en gramos) de los paquetes de azúcar de dos marcas distintas. Para ello conformaron dos grupos de trabajo que presentaron la siguiente información.

Azúcar A

923	975	1012	1015	1004
999	987	1030	1021	1003
1002	998	1023	1045	1032
1034	1001	1002	965	1002

Azúcar B

[980; 1000)	8
[1000; 1020)	5
[1020; 1040)	3
[1040; 1060)	2
[1060; 1080)	2

a) Calculen la media, el desvío estándar y el coeficiente de variación para cada empresa.

.....

.....

b) Comparen en cuál de las empresas se envasa el azúcar en forma más homogénea.

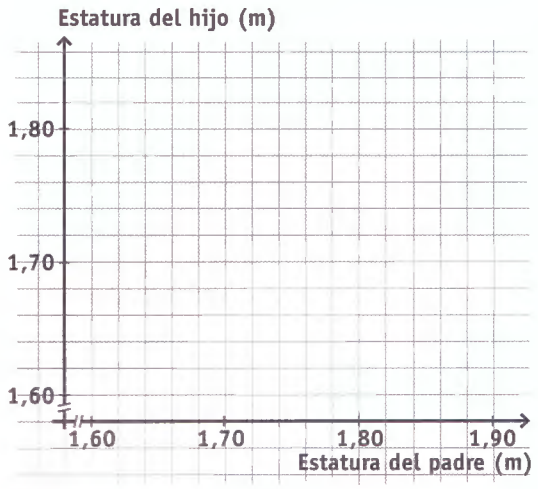
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Estadística bidimensional

34 Estudiando las leyes de la herencia en un curso de Biología, un grupo de alumnos averiguó que se había probado en 1937 una hipótesis según la cual "los padres altos transfieren dicha característica a sus hijos, pero en menor grado". A los alumnos, esta afirmación les presentó cierta curiosidad, y decidieron verificarla con los ejemplos más cercanos que tenían. Para ello recolectaron 10 datos de la estatura del padre y la estatura del hijo de mayor edad. Los que no tenían hermanos mayores de edad, trataron de buscar casos en sus familias (padre y abuelo; tío y primo mayor de edad). Luego, volcaron los datos obtenidos en la tabla que se ve a continuación.

Estatura del padre (m) x	Estatura del hijo (m) y
1,79	1,79
1,81	1,79
1,87	1,86
1,69	1,65
1,68	1,69
1,68	1,64
1,77	1,76
1,74	1,80
1,71	1,69
1,79	1,80



a) Grafiquen esta relación en los ejes cartesianos.

b) Los datos obtenidos, ¿contradicen la hipótesis investigada?

Para leer y recordar

- El estudio conjunto de dos variables, con el objeto de obtener conclusiones respecto de la relación que las vincula se llama *estadística bidimensional.*

- El tipo de gráfico que se utiliza para representar esa relación se llama *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

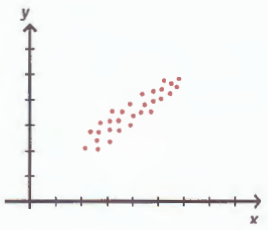
- Cuando los puntos del diagrama se encuentran aproximadamente alineados, se dice que los datos se pueden ajustar mediante un modelo de *regresión lineal.* Esto significa que la relación entre las variables puede describirse mediante un modelo lineal.

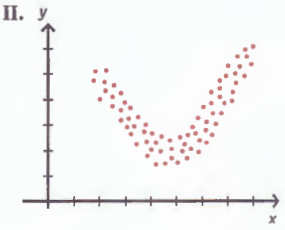
- Si la pendiente del modelo es positiva, se dice que hay *correlación positiva.* Si la pendiente es negativa, se dice que hay *correlación negativa.*

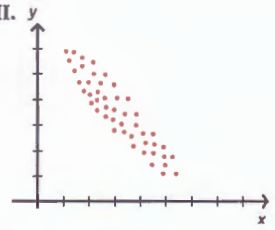
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Correlación

35 Observen los siguientes diagramas de dispersión.

I. 

II. 

III. 

a) ¿Cuáles se pueden ajustar mediante un modelo de regresión lineal?

.....

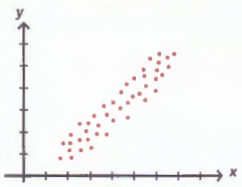
b) En los casos afirmativos, indiquen si hay correlación positiva o negativa.

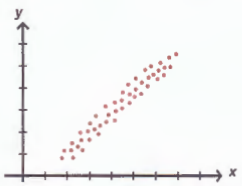
.....

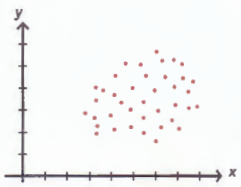
c) En los casos negativos, intenten identificar algún modelo funcional entre los que conocen que se ajuste a la nube de puntos.

.....

Para leer y recordar

A 

B 

C 

- En los ejemplos de la figura, el caso B pareciera ajustarse mejor a un modelo lineal que el A, y el caso C no parece poder ajustarse a un modelo lineal.

- Para medir el grado de la relación entre las variables, podemos trabajar con la *covarianza* (σ_{xy}) y el *coeficiente de correlación* (r), cuyas fórmulas de cálculo son las del cuadro.

Covarianza	Coeficiente de correlación
$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	$r = \frac{\sigma_{xy}}{S_x S_y}$

- El coeficiente de correlación tiene las siguientes propiedades:
  - No depende de la unidad de medida de las variables que se relacionan porque no tiene dimensiones.
  - $|r| \leq 1$.
  - Si $|r|$ es un valor próximo a 1, la correlación es fuerte. Esto quiere decir que los puntos están más cercanos a una recta.
  - Si $|r|$ es un valor próximo a 0, la correlación es débil. Esto quiere decir que, a partir de los datos utilizados, la relación entre las variables no puede describirse mediante un modelo lineal.

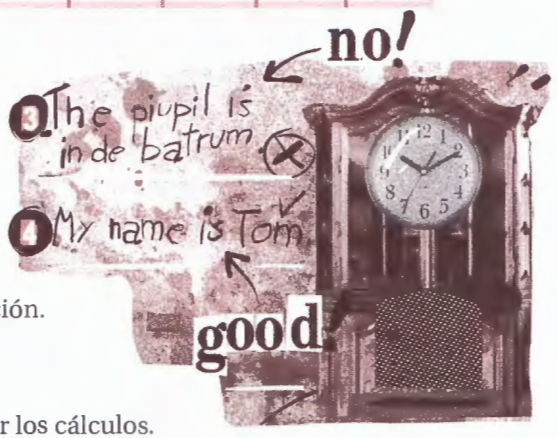
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

36 En la tabla que sigue, se muestran las calificaciones de 10 alumnos en un examen de acreditación internacional de inglés y el tiempo (en horas) que dedicaron a prepararlo.

Tiempo (x)	20	18	35	22	15	10	16	12	25	8
Puntaje (y)	70	70	98	79	61	59	72	61	80	50
$x \cdot y$										

a) Completen el cuadro.

$\bar{x}$		S_x	
$\bar{y}$		S_y	
$\sum x_i y_i$			



b) Calculen la covarianza y el coeficiente de correlación.

σ_{xy} = ... r = ...

c) Expresen las horas en minutos y vuelvan a realizar los cálculos.

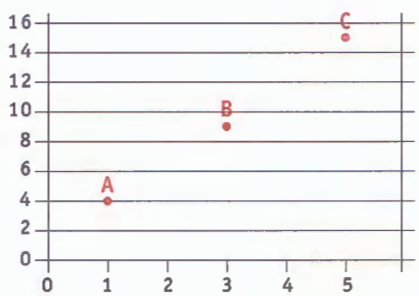
σ_{xy} =..... r = ...

d) ¿Cuál de las dos medidas les resulta más confiable para medir la relación lineal entre las variables? Justifiquen la respuesta.

.....

37 En el laboratorio de física, los chicos trabajaron con un resorte al que le agregaron un platillo; sobre el platillo colocaron unas pesitas iguales, pero que no tienen indicación de peso, y midieron el alargamiento del resorte en cada pesada. Los datos que siguen recopilan tres de las mediciones que realizaron.

x (cantidad de pesitas)	1	3	5
y (alargamiento en mm)	4	9	15



a) Analicen si los puntos que están en la tabla se encuentran alineados y hallen el coeficiente de correlación.

b) Marquen en el gráfico la recta que pasa por los puntos indicados. Utilicen distintos colores para cada par de puntos.

I. A y B (en azul); **II.** B y C (en verde); **III.** C y A (en negro).

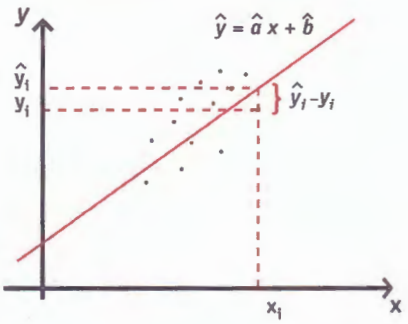
c) Calculen en cada caso la distancia entre la recta y el punto que no le pertenece. ¿Cuál de las tres rectas les parece más apropiada para representar el alargamiento del resorte en función de la cantidad de pesas en la balanza?

d) Si tuvieran 10 puntos no alineados, ¿sería posible aplicar este método para hallar la recta? Justifiquen.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Recta de regresión

Para leer y recordar



- Cuando determinamos que la relación entre dos variables es interpretable mediante un modelo lineal, a partir de una tabla de valores observados experimentalmente, nos resta hallar la recta que mejor se ajusta a los datos, llamada *recta de regresión de y sobre x*, que simbolizaremos como $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$.
- Para encontrar los coeficientes $\hat{a}$ y $\hat{b}$, se utiliza un método llamado de *cuadrados mínimos* que permite encontrar la recta tal que la suma de los cuadrados de las "distancias verticales" de los puntos de la nube a la recta sea mínima.

- Las fórmulas más simplificadas halladas a partir del método son: $\hat{a} = \frac{\sigma_{xy}}{S_x^2}$; $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\,\bar{x}$.

38 Para poder comparar la relación entre la precisión en la medición de la temperatura por medio de un termómetro de mercurio y con uno de contacto que se tiene a prueba, se toma la temperatura de los 10 pacientes de una ronda médica de un sanatorio por los dos métodos y se registran los datos en una tabla (ambas, medidas en °C).

Mercurio	36,8	37,2	39,2	40,6	37,8	38,3	36,9	36,5	35,8	38,6
Contacto	35,1	36,3	38,3	39,0	36,4	37,1	35,5	34,9	34,2	36,9

a) Hallen el coeficiente de correlación.

.....

.....

b) Hallen la ecuación de la recta de regresión que permite estimar la temperatura que indica el termómetro de mercurio en función de la medida con el termómetro de contacto.

.....

.....

c) Estimen la temperatura que marcaría el termómetro de mercurio en un paciente en el que el termómetro de contacto marcó 38,0 °C.

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

39 Se recolectó información entre 8 personas para indagar sobre la relación entre el promedio obtenido en su carrera universitaria y el salario inicial en su primer trabajo profesional. Los datos fueron los indicados en la tabla.

Promedio	5,33	9,95	9,82	5,76	8,29	7,51	5,54	8,81
Salario inicial ($)	778	1215	1181	827	1098	1005	770	1075

a) Construyan el diagrama de dispersión.

b) Hallen la covarianza y el coeficiente de correlación y analicen la pertinencia del modelo lineal para la relación entre las dos variables.

.....

c) Hallen los coeficientes de la recta de regresión que permita estimar el salario inicial en función del promedio.

.....

d) Según el modelo encontrado, ¿cuánto debería ganar un profesional cuyo promedio universitario fue de 7 puntos?

.....

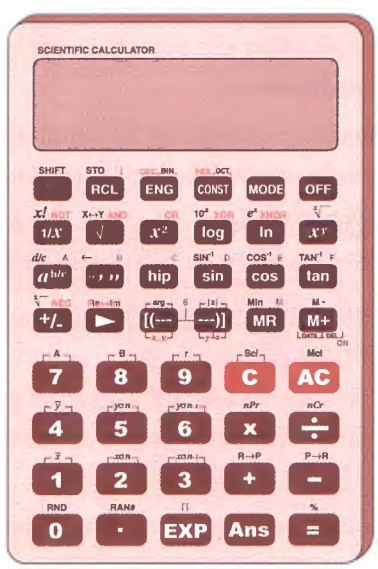
Para observar

Uso de la calculadora científica

Con algunas calculadoras que trabajan con dos variables, se pueden obtener los coeficientes de la recta de regresión y el coeficiente de correlación.

Por ejemplo, para resolver el problema anterior utilizando una de estas calculadoras, procedemos de la siguiente manera:

- **Elegimos el modo LR (*Linear Regression*) pulsando la tecla** MODE.
- **Limpiamos la memoria pulsando la secuencia de teclas** Shift AC.
- **Ingresamos el primer par ordenado (5,33; 778) pulsando** 5,33 $[X_D; Y_D]$ 778.
- **Procedemos igual con los otros pares.**
- **Una vez ingresados los pares, hallamos: la ordenada al origen de la recta con la tecla** A; **la pendiente de la recta con la tecla** B; **el coeficiente de correlación con la tecla** r.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

40 Se hizo una prueba de la efectividad de un aditivo para fertilizante de cultivos de semilla en distintas dosis, y se obtuvieron los siguientes datos:

Cantidad (partes por mil de fertilizante clásico)	10	20	30	40	50
Frecuencia (toneladas por hectárea)	3,2	3,5	3,2	3,9	4,6

a) Hallen el coeficiente de correlación y la recta de regresión que permite estimar el rendimiento según la cantidad de fertilizante utilizado.

b) Estimen el rendimiento cuando se agregan 12 partes por mil de aditivo.

c) ¿Cuál es el rendimiento si no se agrega aditivo?

d) ¿Con qué coeficiente de la recta de regresión se asocia la respuesta del punto anterior?

e) Estimen cuántas toneladas por hectárea se incrementa el rendimiento por cada parte por mil de aditivo que se agrega.

41 La tabla que sigue muestra la relación entre el precio de una habitación doble y el promedio de cuartos diarios ocupados durante una temporada.

Precio ($)	100	90	125	110	95
Cantidad de cuartos	150	160	120	135	170

a) Hallen la recta que permita estimar la cantidad de cuartos diarios ocupados en función del precio.

b) Estimen la cantidad de cuartos ocupados para un precio de $105.

c) ¿Es correcto el uso del modelo lineal para realizar estos cálculos? ¿Por qué?

d) ¿Les parece que sirve este modelo para estimar la cantidad de cuartos ocupados con un precio de $500? ¿Y de $10?

42 Una inmobiliaria decide investigar si en una zona residencial existe alguna relación entre el valor de las propiedades y la superficie cubierta por ellas. Para eso toma los datos de las 7 casas que tiene a la venta en la zona.

m^2	Precio ($)
230	200 000
150	180 100
85	98 000
76	135 000
94	112 900
170	204 000
350	500 000

a) Calculen el coeficiente de correlación y analicen la pertinencia de la elección de un modelo lineal que relacione las variables.

b) Hallen la recta de regresión que les permita estimar el precio de una vivienda a partir de la superficie cubierta.

c) ¿A qué precio debería cotizar la inmobiliaria una casa de 100 m^2 según este modelo?

d) Hallen la recta de regresión que permite estimar la superficie de una vivienda a partir del precio de venta. ¿Es la inversa de la encontrada en **b)**?

e) Estimen la superficie de una vivienda que fue cotizada por esta inmobiliaria a $95 000.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La estadística en los medios

Si bien uno de los objetivos principales de la estadística es proveer herramientas para simplificar la información y hacerla accesible a mayor cantidad de gente, esto no ocurre con mucha frecuencia. Las herramientas estadísticas son usadas frecuentemente para manipular la visión de los lectores sobre la realidad. Algunos ejemplos son los siguientes.

- **El uso malintencionado de los porcentajes y los valores absolutos.**

Para comprender el alcance de esta manipulación, pondremos algunos ejemplos y luego, entre paréntesis, la aclaración acerca de la información omitida.

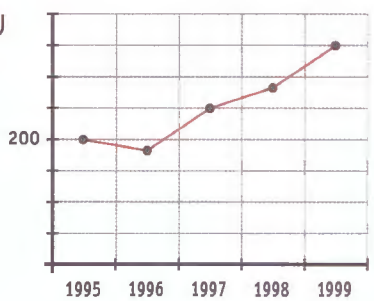
"El año pasado, desaprobaron 20 alumnos, y este año, 40. Esto implica que el índice de desaprobación se incrementó en un 100%". (El año pasado, había 150 alumnos, y este año hay 480).

"Entre los que se enfermaron, el 75% debió ser internado en terapia intensiva. Es necesario que las autoridades decreten una emergencia sanitaria". (Se declararon 4 casos en una ciudad de 100 000 habitantes, entre los cuales 3 fueron internados en terapia intensiva).

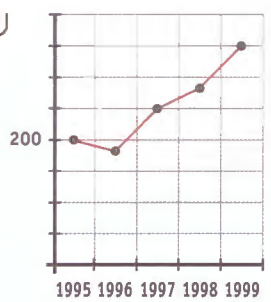
- **La modificación de la escala de los gráficos produce distorsión en la percepción de los datos.**

43 Observen los gráficos. ¿Cuál sugiere mayor velocidad de crecimiento?

a)



b)



.....

.....

.....

.....

.....

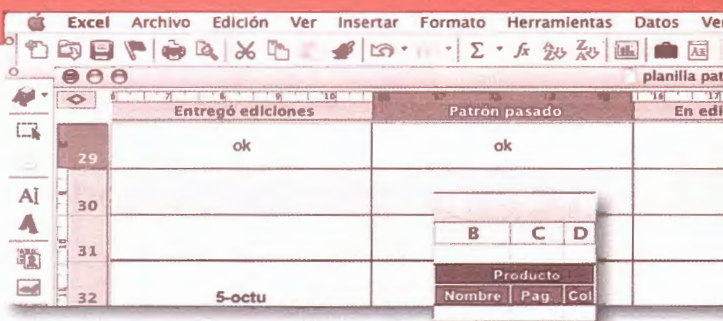
- **Las publicidades comparativas.**

44 Observen la ilustración. La información es cierta, pero hay una omisión: el promedio del auto A es de 10 litros, pero el desvío es 2 litros, mientras que el promedio del auto B es realmente 12 litros; sin embargo, su desvío es 0,5 litros. ¿Cuál es realmente más conveniente?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

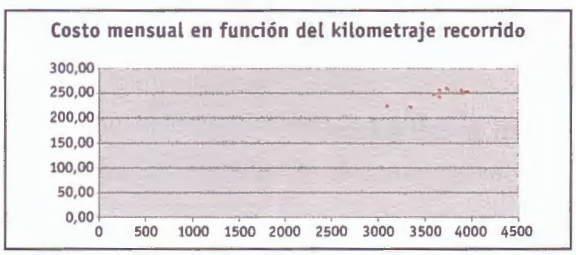
La planilla de cálculo y la recta de regresión



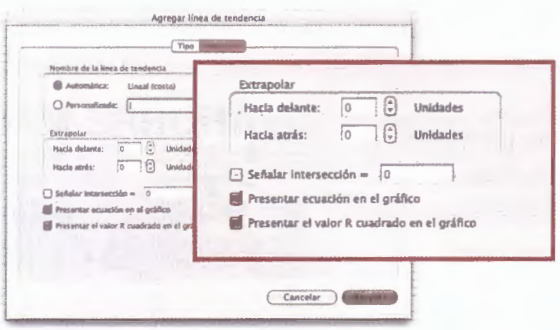
Cuando se trabaja con muchos datos, los cálculos para estimar la recta de regresión se tornan un tanto engorrosos, aun utilizando la calculadora.
Las planillas de cálculo ofrecen herramientas muy prácticas para el cálculo de modelos de regresión, aun en los casos en que no son lineales.
En el ejemplo que sigue, se intenta estimar la recta de regresión lineal que vincula el costo mensual de mantenimiento de un vehículo en relación con la cantidad de kilómetros recorridos. Para que resulte más claro, se tomaron solamente diez datos.

	A	B
1		
2	km	costo
3	3101	225,33
4	3354	223,86
5	3738	261,06
6	3894	255,96
7	3904	252,24
8	3937	254,70
9	3661	256,85
10	3663	244,60
11	3963	254,02
12	3603	248,39
13		

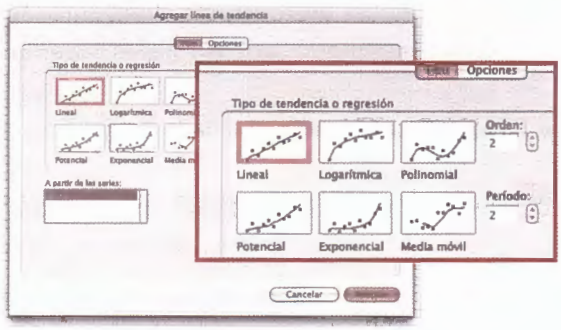
Se ingresan en una planilla de cálculo en la misma forma, y se construye un diagrama de dispersión. En él se selecciona la nube de puntos haciendo un clic en cualquiera de los puntos del gráfico.



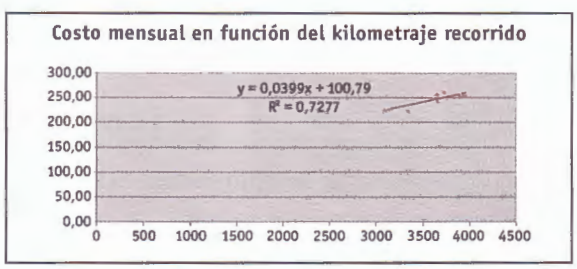
En el cuadro de diálogo, elegimos **Lineal**, porque vamos a realizar una regresión lineal. Luego, seleccionamos la solapa **Opciones** y, en ella, cliqueamos en **Presentar ecuación** en el gráfico y en **Presentar el valor R cuadrado** en el gráfico.



En la opción **Gráfico** del menú, se selecciona **Agregar línea de tendencia**.



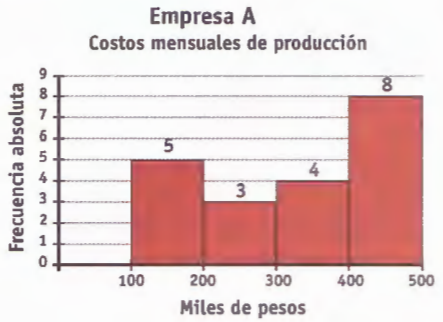
En el gráfico, aparecerá la ecuación de la recta de regresión y el cuadrado del coeficiente de correlación, que les permitirá además analizar si el modelo hallado es pertinente.

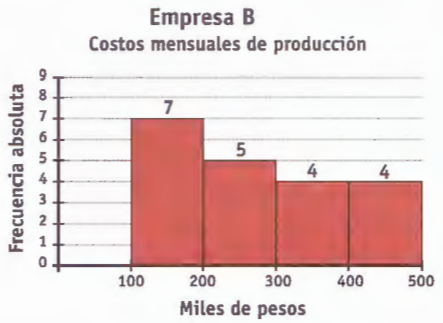


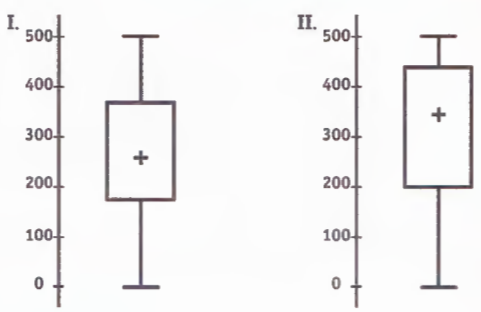
45 Reconstruyan en una planilla de cálculo el ejemplo planteado.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

46 Los siguientes gráficos muestran los costos de producción de dos empresas durante 20 meses (en miles de pesos).







a) Indiquen cuál *boxplot* se corresponde con los datos de cada histograma.

b) Estimen, a partir de los gráficos, cuál de las dos empresas tiene costos más homogéneos.

c) Verifiquen la información obtenida y hallen el coeficiente de variación de cada muestra.

d) Ubiquen en cada *boxplot* los valores de las medidas que se utilizaron para construirlos.

47 La siguiente muestra corresponde al kilometraje recorrido por trabajo de 10 corredores de una planta industrial.

758	1250	2504	1730	1853
559	3755	2952	742	1548

a) Calculen el kilometraje promedio y la varianza.

b) Si el costo de mantenimiento del auto se estipula en $0,15 el kilómetro. ¿Cuál es el costo promedio y la varianza?

c) Si los corredores cobran en concepto de viáticos $\$50 + 0{,}05x$ (x es cantidad de kilómetros), ¿cuál es el viático promedio y la varianza?

d) A partir de lo observado en los puntos b y c, hallen el viático promedio y su varianza para una muestra cuyo promedio es 1532 km y su varianza 970 000 km^2.

48 En una fábrica de galletitas, se midió durante un mes completo el consumo diario de harina. Los datos obtenidos fueron ordenados en la siguiente tabla de frecuencias.

Kilogramos	[0; 100)	[100; 200)	[200; 300)	[300; 400)
Frecuencia	7	9	4	10

a) Aproximen el valor de la mediana y los valores de los cuartiles.

b) Aproximen la cantidad máxima de harina que utilizan el 35% de los días de menor consumo.

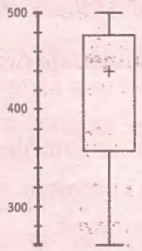
c) Aproximen la cantidad mínima de harina que utilizan el 20% de los días de mayor consumo.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

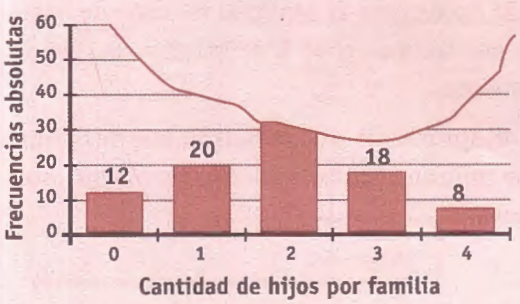
1 En el *boxplot* de la figura, que corresponde a los salarios de 100 empleados, se puede observar:



- a) el salario promedio es $400.
- b) un 50% de los empleados tiene el salario entre $440 y $500.
- c) la mayoría de los salarios están por debajo de $400.
- d) el rango de los salarios es $160.

2 En el histograma de la figura, se rompió la imagen, y no se puede apreciar la frecuencia del 2. Si se sabe que el promedio es de $1,\widehat{8}$ hijos por familia:

- a) la frecuencia que falta es 22.
- b) la muestra es de más de 100 familias.
- c) no hay frecuencia posible que haga ciertos los datos del histograma.
- d) la frecuencia acumulada hasta 2 es 64.



3 En una muestra de 40 observaciones, el promedio es 80, y los valores máximo y mínimo son, respectivamente, 200 y 36. Si retiramos de la muestra estos dos valores, el nuevo promedio es:

- a) 80
- b) 78
- c) 74,10
- d) ninguno de los anteriores.

4 Observen la tabla.

Peso del padre (kg)	85	73	64	125
Peso del hijo (kg)	50	95	44	90

- a) El coeficiente de correlación muestra una correlación negativa.
- b) El coeficiente de correlación muestra que no es apropiado un modelo lineal para estimar el peso del hijo en función del peso del padre.
- c) La recta de regresión tiene ordenada al origen negativa.
- d) Los pesos de los hijos son más homogéneos que los de los padres.

5 ¿Qué ocurre si en la tabla del problema anterior expresamos los pesos en gramos?

- a) La covarianza y el coeficiente de correlación aumentan 1000 veces.
- b) La pendiente y la ordenada al origen permanecen invariantes.
- c) La covarianza no se modifica.
- d) El coeficiente de correlación permanece invariante.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

La familia de José abrió una casa de empanadas cerca de la escuela. En los horarios de salida, distribuyó volantes en la esquina de la escuela registrando los siguientes datos:

Cantidad de volantes distribuidos	200	120	250	360	150
Cantidad de empanadas vendidas	267	220	337	447	238

1 Hallen la recta de regresión que permite estimar la cantidad de empanadas vendidas en función de la cantidad de volantes distribuidos. ($R: y = ax + b$)

.....

2 Hallen la recta de regresión que permite estimar la cantidad de volantes que se deben distribuir en función la cantidad de empanadas vendidas. ($S: x = cy + d$)

.....

3 Calculen el coeficiente de regresión y analicen si es buena la estimación.

.....

4 ¿Cuántas empanadas se estima que se venderían si se distribuyen 300 volantes?

.....

5 ¿Qué cantidad de volantes debería repartir José para esperar una venta de 400 empanadas?

.....

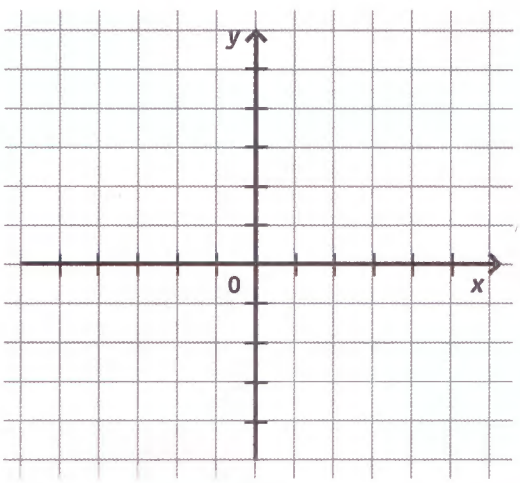
6 Grafiquen R y S en un mismo sistema de ejes cartesianos y verifiquen analíticamente que se cortan en el punto $P = (\bar{x}; \bar{y})$.

7 Calculen el ángulo agudo que forman las rectas R y S entre sí.

.....

.....

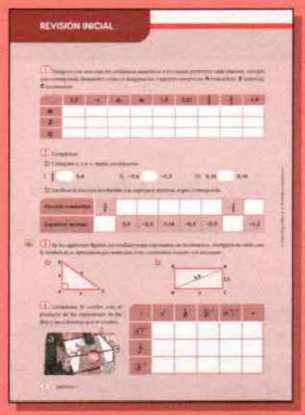
.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

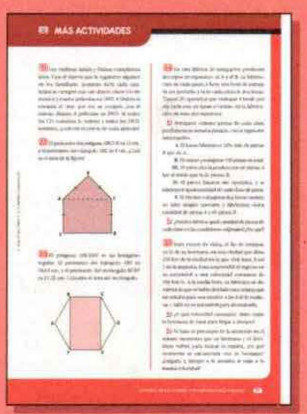
Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una presentación general del tema es el eje que abre cada capítulo.

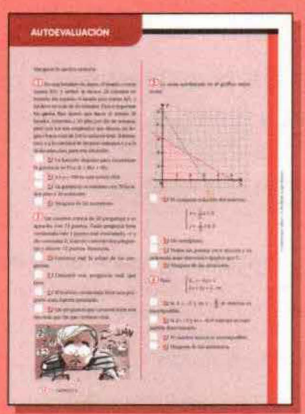


Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

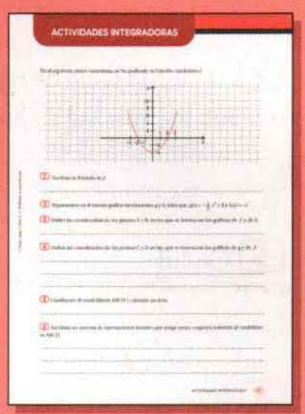
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados con aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



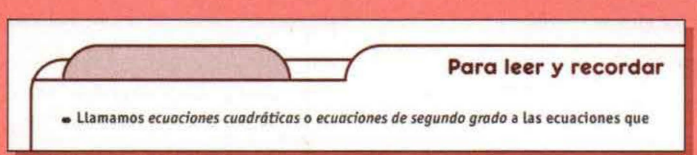
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



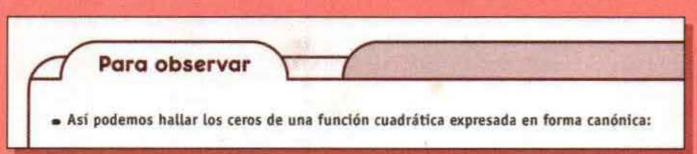
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 3 y 4, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE